La piramide di Talete

Flavia Marcacci

Abstract: Thales of Miletus is very famous for the matter of the measurement of height of pyramid. This paper is intended to rebuild the hypothetical reasoning used by Thales, but above all it tries to understand if there were suitable geographical conditions for obtaining a situation in which the shadow of a pyramid matches with its own height.

1 Talete di Mileto: l'altezza della piramide

È fuor di dubbio che nel processo di costituzione del sapere greco un ruolo chiave fu giocato da Mileto, ricca città dell'Asia Minore, ben collegata ad Egitto, Babilonia, Fenicia e Grecia. Nonostante le alterne vicende con i Persiani, sotto i quali Mileto cadde intorno al 540 a.C., questa città si impose come un punto di riferimento per la cultura greca almeno per i secoli VI e V. A Mileto operarono tre pensatori: Talete, Anassimandro, Anassimene. È a Talete, però, che dovremmo essere debitori per qualche conoscenza specificamente matematica[1]. Di Talete (ca. 640-547 a.C.) ci viene narrato (da PROCLO, [4] 11 A 20 e DIOGENE, [4] 11 A 1) che ideò cinque proposizioni di geometria elementare:

(1) un cerchio è diviso in due aree uguali da qualunque diametro,
(2) gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali,
(3) gli angoli opposti al vertice sono uguali,
(4) due triangoli sono uguali se hanno un lato e i due angoli adiacenti uguali,
(5) un triangolo iscritto in una semicirconferenza è rettangolo.

Sebbene siano proposizioni che si ritrovano nella geometria euclidea (def. I 17 e propp. I 5, I 15, I 26, III 31), non abbiamo alcun dato per decidere quanto Talete ne avesse fornito una elaborazione astratta e cosciente. Probabilmente si trattava di

[1] Circa la figura di Talete intendiamo sottolineare quanto stia emergendo soltanto in tempi recenti un interessamento maggiore, che lascia intravedere nuove possibilità di lettura della posizione e della produzione di questo presocratico. Circa le prospettive storiografiche costituitesi attorno a Talete ci permettiamo di rimandare a (MARCACCI, 2008); circa la complessità e la ricchezza del sapere prodotto da questo pensatore si rimanda a (O'GRADY, 2002) e a (TEZAS, 1990).

semplici intuizioni, o di revisioni di conoscenze di geometria provenienti dall'Oriente. L'attestazione di un qualche interesse per la geometria in Talete, ad ogni modo, è reperibile soprattutto altrove, ovvero nei problemi pratici ai quali si interessò e che sono di fatto riducibili a problemi di geometria piana e solida: il calcolo dell'altezza di una piramide, altezza che resta inaccessibile, mediante la misurazione della sua ombra nel momento in cui essa è pari all'altezza dei corpi (DIOGENE LAERZIO, *Vite dei filosofi*, I 27; PLINIO, N. H. XXXVI 82; PLUTARCO, *Convivio dei VII sapienti*, 2) e il calcolo della misura della distanza delle navi dalla riva, grandezza questa ugualmente inaccessibile (PROCLO, *Commento al I libro di Euclide*, 352.14-18).

In questa sede ci soffermeremo sul primo problema, generalmente mal affrontato o affrontato solo parzialmente. Proveremo, dapprima, ad impostare il problema geometricamente e tenendo accuratamente presenti le poche (ma eloquenti) osservazioni riportate dalle fonti, senza appesantirle con ipotesi *ad hoc* [2]. In secondo luogo, e più estesamente, valuteremo le condizioni esterne necessarie affinché fin dai tempi di Talete si potesse mettere in pratica un qualche ragionamento, quanto più semplice possibile: si vorrà vedere, in altre parole, se e quante volte potevano darsi le condizioni reali perché potessero osservarsi delle ombre alte quanto i corpi nella latitudine in questione. Va da sé che, se i due aspetti del problema hanno una qualche continuità fra loro, le testimonianze circa il problema di Talete assumerebbero una ulteriore conferma circa la loro attendibilità.

2 Le fonti

Partiamo dunque rileggendo le fonti che ci informano sull'argomento:

Determinazione dell'altezza delle piramidi tramite la misura della loro ombra nell'ora del giorno in cui le ombre hanno lunghezza pari all'altezza dei corpi da cui sono proiettate

Diogenes Laertius I 27 [da Ieronimo] (= [4] 11 A 1): Ieronimo dice che misurò anche l'altezza delle piramidi dall'ombra, avendo osservato quando la nostra ombra ha la stessa altezza del corpo.

[2] Generalmente, infatti, tutti gli studiosi che hanno affrontato il problema si sono preoccupati di predisporre idonee ricostruzioni dei ragionamenti e delle procedure che, plausibilmente, avrebbero indotto Talete a procurarsi i risultati citati dalle fonti. Questo è avvenuto anche e soprattutto in relazione al problema della misurazione della distanza delle navi dalla riva. Cf. (BRETSCHNEIDER, 1870), (TANNERY, 1988), (HEATH, 1981), (LORIA, 1987, p. 22), (MCKIRAHAN, 1994), (TEZAS, 1990), (O'GRADY, 2002).

Plinius N. H. XXXVI 82 (= [4] 11 A 21): Talete di Mileto riuscì a determinare la misura dell'altezza delle piramidi, misurandone l'ombra nel momento in cui suole essere pari al corpo che la proietta.

Determinazione dell'altezza delle piramidi misurandone l'ombra e stabilendo una proporzione

Plutarchus *Conv. VII sap.* 2 (= [4] 11 A 20): Piantata un'asta al limite dell'ombra che la piramide proiettava, poiché i raggi del Sole investendole formano due triangoli, tu [Nilosseno si rivolge a Talete] dimostrasti che piramide e asta stanno tra loro nella stessa proporzione in cui stanno le loro ombre.

Si noti come Plutarco sottolinea lo stupore e l'ammirazione verso Talete sollevata proprio dal problema dell'altezza della piramide; stupore che tra l'altro è comprensibile: pensare di ricorrere ad una grandezza misurabile (l'ombra proiettata) per determinare la misura di un'altra grandezza inaccessibile (l'altezza della piramide) è un'idea raffinata, probabilmente geniale. Ed evidentemente nessuno fino ad allora ci aveva pensato.

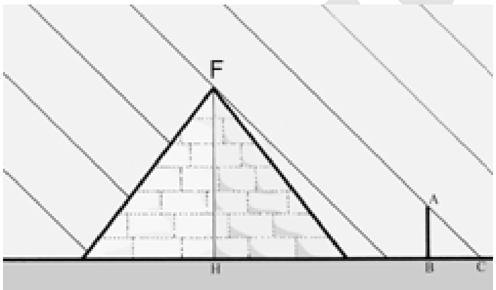

Figura 1

3 La procedura geometrica

Per capire la fattività della procedura di Talete è necessario approfondire il problema da un punto di vista geometrico. Come si può misurare la lunghezza dell'ombra della piramide? Chiamando C l'estremo dell'ombra, non ha senso calcolarne la distanza dal lato di base (cioè GB), perché non è quello il segmento equivalente all'altezza del monumento. Il segmento che cerchiamo è HB, equivalente al segmento inaccessibile FH: come misurarlo? Vedremo le alternative offerte dalle fonti, sottolineando che in entrambi i casi i calcoli svolti tengono conto dell'orientamento delle piramidi, tale che ognuna delle quattro facce risulta allineata secondo i punti cardinali (Grimal, 2004); in questo modo la direzione dei raggi è parallela (e perpendicolare) ai lati di base nel momento opportuno. Se non fosse così, bisognerebbe ragionare in tutt'altro modo, costringendo Talete ad impiegare abilità trigonometriche che preferiamo non assumere, per mantenere il *ragionamento quanto più semplice possibile* per non dubitarne circa la fattibilità.

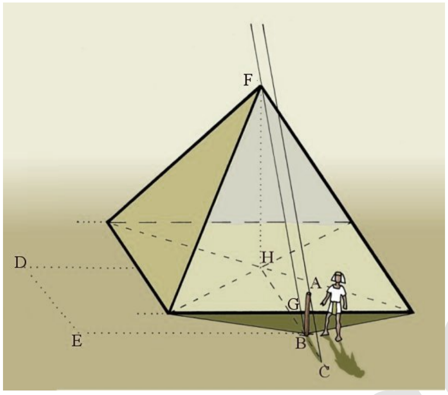

Figura 2

AB: bastone
FH: altezza della piramide

IPOTESI A[3]

Da Plinio e Diogene Laerzio assumiamo che Talete avrebbe misurato l'ombra proiettata dalla piramide ad una certa ora del giorno, allorché l'ombra di un oggetto qualsiasi è lunga quanto l'altezza dell'oggetto. Per determinare il momento esatto in cui operare Talete avrebbe semplicemente posto attenzione all'attimo in cui l'ombra dei corpi è pari alla loro altezza, ad esempio confrontando la lunghezza di un bastone (*AB*) e l'ombra da esso proiettata sul terreno (*BC*). Misurando la lunghezza dell'ombra della piramide in quel preciso momento, Talete avrebbe potuto risalire alla misura dell'altezza della piramide.

Va trovato $HB = FH$. Ma $HB = HG + GB$; poiché H cade esattamente al centro del quadrato di base della piramide (H)[4] e dunque HG è pari a metà del lato, e GB è direttamente misurabile, si trova il segmento dato. È verosimile che Talete abbia lavorato su un *modello* di piramide, ragionando sul quale avrebbe cercato di capire come trovare il segmento HB, equivalente all'altezza FH non misurabile. Avrebbe cioè potuto *ricostruire la situazione per renderla "sperimentabile" e studiarla a fondo*.

[3] I seguenti passaggi sono stati sinteticamente riportati anche in (MARCACCI, 2009).

[4] Gli Egiziani sapevano bene che l'altezza della piramide cade nel punto di incontro delle diagonali del quadrato di base, come anche sapevano calcolare il volume di un tronco di piramide. Cf. (BOYER, 1976).

Le ipotesi sulle stesse tecniche di costruzione della piramide lasciano pensare all'uso invalso di modelli o quanto meno simulazioni approssimate[5]: Talete avrebbe potuto imitare le simulate degli Egiziani ed impiegarle per scopi non architettonici.

IPOTESI B

Plutarco parla di dimostrazione costruita sulla proporzione esistente tra l'altezza di un bastone e la sua ombra da un lato e l'altezza della piramide e la lunghezza della sua ombra dall'altro in un determinato momento del giorno. In questo caso dovremmo presupporre una certa dimestichezza di Talete con il concetto di proporzione[6]. Non è da escludere che, percorsa l'ipotesi A, il Milesio non abbia tentato una generalizzazione con questa ipotesi B: resta comunque più prudente pensare che gli sforzi maggiori furono votati all'ipotesi A.

In questo secondo approccio Talete avrebbe usato nuovamente un bastone, «al limite dell'ombra che la piramide proiettava», per sfruttare la proporzione che intercorre tra bastone e altezza della piramide e tra le rispettive ombre e da qui risalire all'altezza della piramide conoscendo quella del bastone. Ovvero (sempre con riferimento alla figura 2, ispirata al testo di Plutarco):

$$AB : BC = FH : HB (= FH : DE) \qquad (*)$$

A questo punto se Talete avesse misurato DE ($= FH + GB$, potendo anche ricorrere alla costruzione di un quadrato con il vertice in H) gli sarebbe stato facile arrivare a FH svolgendo la proporzione:

$$FH = DE \cdot AB/BC.$$

È chiaro che AB e BC sono i dati più facilmente reperibili essendo riferiti al bastone.

È utile notare che questa procedura sembra coinvolgere il cosiddetto "teorema di Talete", che curiosamente non figura tra le proposizioni matematiche richiamate in apertura[7]. Per ragioni di carattere storico sono propensa ad adottare la soluzione dell'ipotesi A: non è affatto detto, e forse è da escludere, che Talete possedesse un concetto raffinato di proporzione. Al suo tempo si lavorava certamente con i rapporti,

[5] Cf. (DILKE, 1987)

[6] Contro questa interpretazione cf. (TANNERY, 1988), (HEATH, 1981), (LORIA, 1987,p. 22). Heath in particolare assimila il metodo descritto da Plutarco al metodo egiziano descritto nel Papiro di Rhind in cui si ricorre al *seqet* (il rapporto tra la diagonale di base e lo spigolo della piramide) per calcolare l'altezza delle piramidi.

[7] È caso quanto mai particolare che solo in Italia ad essa corrisponda il teorema delle parallele tagliate da una trasversale (cf. *Elem.* I 27-30). Probabilmente gli fu attribuito *ad honorem*, tra la fine del XIX e gli inizi del XX secolo in Italia (PROCISSI, 1984); ne può essere prova che nei paesi anglosassoni con "teorema di Talete" si intitola la proposizione (5) ricordata in apertura.

e sebbene si sappia che anche i Pitagorici operarono sulle proporzioni[8], sembra più cauto pensare ad una procedura che non coinvolgesse il passaggio (*) di cui sopra.

4 Condizioni al contorno: l'ombra in direzione est-ovest

Resta il fatto, però, che ciò non ci può bastare. Anche se Talete percorse la strada **A**, più semplice, dovevano comunque realizzarsi certe condizioni al contorno. Si prenda per buono, come già detto prendendo a riferimento le piramidi di Giza, che le facce delle piramidi sono orientate verso il Nord, tale che l'edificio funebre viene ad essere disposto in direzione parallela e perpendicolare ai quattro punti cardinali: ciò consente ai raggi solari di gettare un'ombra parallela ai lati (come in figura) e questo al momento in cui il sole è più alto all'orizzonte, cioè a mezzogiorno, e in cui l'ombra è anche più corta possibile. Contemporaneamente deve però aversi un'inclinazione dei raggi pari a 45°, tale che l'ombra proiettata sia davvero pari all'altezza del corpo. Questa condizione è quella che consente di impostare il problema nella sua versione geometrica più semplice e porta con sé due aspetti che sono necessariamente da verificare.

(a) Va tenuta in considerazione la latitudine e la longitudine in relazione all'inclinazione dei raggi solari: sappiamo che la piana di Giza è all'incirca a 29° 59′ di latitudine Nord e a 31° 9′ di longitudine Est. A questa latitudine l'ombra è inclinata di 45° quando si verifica che il sole a mezzogiorno è al di sotto dell'equatore per 15°. Infatti si ha 45° - 29° 59′ = 15° 1′. Alla latitudine di Giza sembra che questo si verifichi in due momenti, ovvero il 19 novembre e il 22 gennaio.

Momenti significativi risultano essere:
Solstizio d'estate, 21 giugno. Il sole è sul Tropico. A Giza l'ombra dovrebbe arrivare con una differenza pari a 30° - 23,5°. Se è così, l'ombra del sole avrà, nel giorno suddetto, una inclinazione di circa 6,5°. Questo significherebbe che l'ombra della piramide cade all'interno della sua base. Infatti la piramide di Cheope, ad esempio, ha una altezza di 146,6 m e il lato di base di 211,2 m[9]. La lunghezza dell'ombra allora sarebbe 146,6 tg 6,5° = 16,7, di gran lunga minore della metà del lato di base della piramide. L'ombra cade nell'area di base.
Equinozio d'autunno, 23 settembre. I raggi del sole arrivano a Giza con un'inclinazione pari a 30°, pari cioè alla latitudine del posto. Eseguendo calcoli analoghi a quelli sopra si ottiene ugualmente che l'ombra cade all'interno dell'area di base.

[8] Ad esempio si deve ai Pitagorici la proporzione *perfetta* $A/G = G/H$, dove dati due numeri p e q A è la loro media aritmetica $(p+q)/2$, G la loro media geometrica $\sqrt{pq}$, H la loro media armonica $2pq/(p+q)$. Cf. (KLINE, 1999).

[9] Si tratta di misure presunte per l'epoca, quando l'edificio era rivestito.

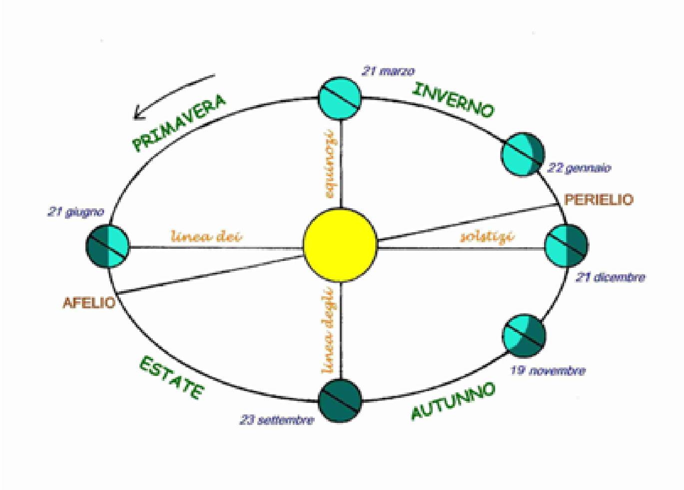

Figura 3

19 novembre e 22 gennaio. Si arriva al 19 novembre (e 22 gennaio), data presunta quando il sole è di 15° sotto l'equatore (vedi scheda "Date notevoli" in fondo). A questo punto a Giza i raggi del sole arrivano inclinati di 15° + 30° = 45°, ovvero con la giusta inclinazione per avere l'ombra pari all'altezza del corpo.
Solstizio di inverno, 21 dicembre. Per ovvie ragioni i raggi del sole arrivano a Giza con 53,5° = 23,5° + 30°.
Equinozio di primavera, 21 marzo. I calcoli sono come quelli dell'equinozio d'autunno.

(b) L'eventuale fuoriuscita dei raggi dalla base della piramide va verificata su un modello di piramide quanto più prossimo ad una piramide reale. Sappiamo che il dubbio fu sollevato nel secolo scorso da Matteo Barbieri[10], secondo cui l'ombra della piramide doveva ricadere all'interno dell'area di base, a causa della bassa latitudine dell'Egitto, rendendo impossibile la misurazione. Ma in realtà, la conformazione di questi edifici sacri dovrebbe lasciare svanire il problema. Prendendo a riferimento i dati della piramide di Cheope (una altezza di 146,6 m e il lato di base di 211,2) l'angolo medio di inclinazione delle facciate di una piramide (ovvero l'angolo diedro) è di circa 54,2° [11].

In riferimento alla figura 4 e con i ragionamenti riportati al punto (a), è possibile tracciare questo bilancio:

[10] In (LORIA, 1987, p. 21)
[11] Rinaldi riporta un angolo di 52°, che geometricamente è sbagliato: è plausibile che la misura sia stata fatta sull'edificio, che non è ovviamente una piramide perfetta. Cf. (RINALDI, 1983, p. 71).

- L’ombra esce dalla base della piramide (P') se $\beta > \alpha$. Inoltre deve aversi $35,8° < \beta < 53,5°$.

- Tale valore si ha dopo il 15 ottobre e prima del 26 febbraio, quando si verifica che l’angolo di inclinazione dei raggi del sole sulla piramide è pari a $\alpha = 35,8°$ (vedi scheda “Date notevoli”).

- Durante il resto dell’anno si ha sempre $\beta < \alpha$.

Nelle date utili del 19 novembre e 22 gennaio, quando i raggi hanno pendenza di 45°, l’ombra fuoriesce dalla piramide: è possibile calcolare l’altezza (misura inaccessibile) mediante la misura dell’ombra (più facilmente accessibile).

5 Altre situazioni: l’ombra con il Sole a sud, est, ovest

Si ponga ora il Sole esattamente a Sud di Giza: ripetendo i soliti calcoli si trova che la misura si potrebbe effettuare in data 3 novembre e 10 febbraio. Vediamo ora di considerare la situazione in cui il Sole si trova a 45° sull’orizzonte, ma a est o a ovest, per latitudini comprese tra i paralleli 35° S e 35° N; quindi avrebbe soluzione per la grande piramide di Giza. Il Sole si trova esattamente a est e a ovest a 45° sull’orizzonte di Giza circa 28 giorni prima o dopo il solstizio d’estate, cioè il 25 maggio e il 20 luglio, circa 3 ore e 16 minuti prima e dopo il mezzogiorno locale. Queste ultime eventualità così considerate soffrono, però, di uno svantaggio: l’ombra della piramide non sarebbe perfettamente parallela ai lati, poiché fuoriesce dal meridiano (non siamo, infatti, all’equatore), così da costringere ad impiegare conoscenze di trigonometria nel calcolo. Come già detto, preferiamo escludere questa situazione, per rimanere allineati con la semplicità del ragionamento indicata dalle fonti.

6 Conclusioni

Se i nostri calcoli fossero esatti, avremmo almeno le seguenti date in cui Talete avrebbe potuto effettuare la sua misurazione: 22 gennaio, 10 febbraio, 26 febbraio, 15 ottobre, 3 novembre, 19 novembre. La misurazione era di fatto possibile per Talete. Non è da escludere che Talete si sia limitato ad impostare il problema nelle sue linee generali e che qualcun altro ne abbia verificato la fattibilità. Analogamente è possibile che Talete, in uno dei suoi viaggi in Egitto così ampiamente testimoniati ([4] 11A1, 6, 11), abbia sentito dire che in alcuni momenti dell’anno si verificava questa particolare situazione tra oggetti e ombre: su questa notizia avrebbe suggerito di calcolare anche l’altezza della piramide. Questo non significa che Talete avesse coscienza delle posizioni relative terra-sole: l’esercizio appena fatto ci aiuta a stabilire soltanto la fattibilità della misurazione. Molto probabilmente egli studiò le ombre, in maniera empirica, restando colpito dal fatto che d’estate la piramide non ha ombra. Ma con poche osservazioni e magari interrogando gli abitanti del posto, avrebbe tranquillamente potuto svolgere il ragionamento espresso al punto A di cui sopra.

Questo ci consente di parlare della misurazione di Talete come di una misurazione *indiretta*, volta ad ottenere un dato non immediatamente reperibile. Volendo spingerci oltre, tale misurazione può essere assimilata ad una sorta di “esperimento”, in cui inizialmente non c’è coscienza di quali siano i presupposti: si conosce solo la via da percorrere e il metodo da utilizzare, ovvero la deducibilità logica e la forza del ragionamento. Lo scopo del Milesio era di trovare un ragionamento che lo conducesse a tale misurazione. Può essere simpatico immaginarsi Talete che, armato di squadra e

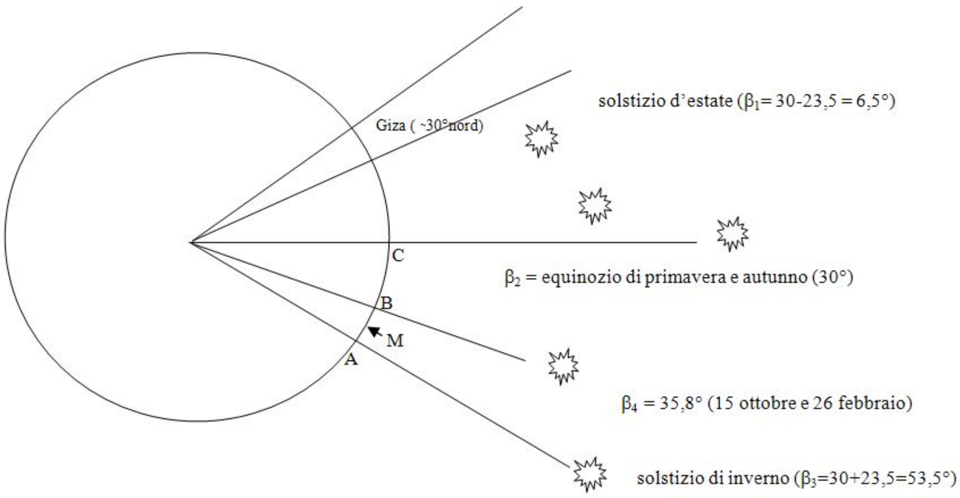

Figura 4

riga[12], gli unici strumenti disponibili al tempo, nei dintorni della piana monumentale[13] intento ad osservare, appuntare, disegnare (magari in terra) e tentare un ragionamento per capire quanto fosse alto quell’immenso “cumulo” di mattoni. Tutto ciò poteva accadere, pur essendo ammissibile che Talete vi avrebbe lavorato lontano dall’Egitto, simulando la situazione.

Osservare ammirati le piramidi e chiedersi quanto fossero alte è spontaneo in tutti gli uomini; ma dare una misura nel momento in cui la piramide ha lati obliqui e non è

[12]Talete poteva conoscere anche i vari strumenti usati da un muratore egizio: squadra cava, squadra convessa, verificatori a piombo, squadra e regolo. Cf. (RINALDI, 1983, p. 70).

[13] La zona monumentale era previamente spianata, tale da non procurare problemi di livellamento del terreno. Se, infatti, attorno alla piramide il terreno non fosse stato piano, il livellamento del terreno sarebbe divenuto la precondizione necessaria al ragionamento sull’altezza Cf. (RINALDI, 1983, pp. 71-73).

neanche consentito l'accesso, non è affatto spontaneo: denota un acume intellettuale e un'originalità non comune che potrebbero aver conferito fama a questo intellettuale.

Scheda - Date "notevoli"

Ricordiamo che il 21 dicembre si ha il solstizio di inverno, il 21 marzo l'equinozio di primavera, il 21 giugno il solstizio d'estate e il 23 settembre l'equinozio d'autunno. Il periodo 23 settembre - 21 dicembre è di 89 giorni; il periodo 21 dicembre - 21 marzo è di 90 giorni.
Si è dimostrato che l'ombra esce dalla base della piramide per $35,8° < \beta < 53,5°$. Si calcolino allora le date per cui $\boldsymbol{\beta_4} = 35,8°$ e $\boldsymbol{\beta_3} = 53,5°$. $\boldsymbol{\beta_3}$ si verifica al solstizio di inverno. In relazione alla figura 4, il punto B (quello con $\beta_4 = \alpha = 35,8°$) si verifica invece due volte l'anno (andata e ritorno) ed il suo valore (ovvero la sua data) è calcolata come durata media proporzionale:

$AC/89 = (\beta_4 - \beta_2)/x$ essendo $CA = \beta_3 - \beta_2$
percorso del sole tra solstizio di inverno e equinozio di primavera
$\rightarrow$ $\mathbf{x} =$ **26 febbraio**.

$CA/90 = (\beta_3 - \beta_4)/x$ essendo $CA = \beta_3 - \beta_2$
percorso del sole tra equinozio di primavera e solstizio di inverno
$\rightarrow$ $\mathbf{x} =$ **15 ottobre**.

Bisogna ora sapere quando l'ombra è lunga quanto l'altezza, ovvero $\beta = \mathbf{45}°$: questo è un valore accettabile perché compreso nell'intervallo nel quale l'ombra può uscire dalla piramide. Sempre in relazione alla figura 4, e assumendo che in un giorno l'inclinazione dei raggi si modifica di 0,26° circa, si ottiene che la distanza BA è di circa 67 giorni, cioè $(\beta_3 - \beta_4)/0.26$. Con una proporzione analoga alla precedente si ottiene $BM = 35$ giorni e $AM = 32$ giorni. Quindi il punto M si ha 35 giorni dopo il 15 ottobre, cioè il **19 novembre**; e si ha 32 giorni dopo il 21 dicembre, cioè il **22 gennaio**.

I risultati esposti in questo lavoro sono stati presentati, in forma solo parzialmente diversa, il 20 febbraio 2008 per il Seminario della Mathesis, sezione di Roma. Si ringraziano, in particolare, per la curiosità e l'interesse che hanno mostrato per l'argomento quando mi sono permessa di sottoporlo alla loro attenzione: l'Ingegnere Giorgio Roncolini, che ha collaborato ampiamente nella parte relativa ai calcoli; il Prof. Raffaele Cunsolo per le preziose integrazioni e osservazioni relativi ai calcoli dell'ombra nelle direzioni est, ovest e sud; infine, i Proff. Giorgio Palumbo dell'Università di Bologna e Vincenzo Millucci dell'Università di Siena, i quali mi hanno fornito suggerimenti indispensabili. Ringrazio infine il «Periodico di Matematiche» per aver acconsentito alla pubblicazione.

Riferimenti bibliografici

[1] MARCACCI F. (2008) , Una caduta di ventisei secoli: l'immagine di Talete, un problema di storiografia filosofica, in *Aquinas* LI 3 (2008), 333-365.

[2] O'GRADY P. (2002), *Thales of Miletus*, Ashgate, Aldershot.

[3] TEZAS C. (1990), *Thales of Miletus and the Beginning of the Sciences*, Ioannina University, Ioannina.

[4] *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Griechisch und deutsch von H. Diels, herausgegeben von W. Kranz, Erster Band, Weidmann, Zürich - Hildesheim, 1985.

[5] BRETSCHNEIDER C. A. (1870), *Die Geometrie und die Geometer vor Euclides. Ein historisches Versuch*, Leipzig, Teubner.

[6] TANNERY P. (1988), *La géométrie grecque*, Ed. Olms, Hildesheim-Zürich-New York, p. 91 (Ripr. facs. dell'ed. Gauthier-Villars, Paris 1887).

[7] HEATH T. (1981), *A history of Greek Mathematics* I. *From Thales to Euclid*, Dover, New York, p. 129 (Ripr. facs. dell'ed. Clarendon Press, Oxford 1921).

[8] LORIA (1987), *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Cisalpino-Goliardica.

[9] PROCISSI A. (1984), Sulla locuzione "Teorema di Talete", *Archimede* 3 (1984), 147-149.

[10] MCKIRAHAN R. D. (1994), *Philosophy before Socrates: an Introduction with Texts and Commentary*, Indianapolis, Cambridge.

[11] GRIMAL N. (2004), *L'antico Egitto*, RCS, Milano, 114 e 118.

[12] MARCACCI F. (2009), *Alle origini dell'assiomatica*, Aracne, Roma, 101-103.

[13] BOYER CARL B. (1976), *Storia della matematica*, ISEDI, Milano, pp. 23-24.

[14] DILKE O. A. W. (1987), *Mathematics and Measurement*, British Museum Publications Ltd, London, p. 9.

[15] KLINE M. (1999), *Storia del pensiero matematico*, vol. I, Einaudi, Torino, pp. 40-41.

[16] RINALDI (1983), *Le piramidi*, Electa, Milano.