Biblioteca Scientifica 35

Martin Davis

IL CALCOLATORE UNIVERSALE

ADELPHI

Tra gli innumerevoli fili di Arianna che si possono seguire per interpretare lo sviluppo del moderno, il libro di Martin Davis seleziona quell'entità al tempo stesso astrusa e comunissima che è il calcolo o computazione. Astrusa perché la teoria della calcolabilità – in bilico tra matematica, ingegneria elettronica e filosofia – è lungi dall'essere un soggetto facile o anche semplicemente acclarato. Comunissima perché chiunque possegga o usi un PC ha tra le mani, spesso senza neanche sospettarlo, un «calcolatore universale» – l'epitome stessa della nozione di computazione. Nel ricostruire la genesi di questa idea, l'autore – un pioniere della moderna informatica, ma anche uno straordinario narratore di episodi della storia della scienza – prende le mosse da Leibniz e compone, con affetto e rispetto, una galleria di personaggi chiave che comprende Boole, Frege, Cantor, Hilbert, Gödel e culmina in Turing. È interessante osservare, su un piano più tecnico, come Davis, pur pagando un doveroso tributo a Kurt Gödel, ponga, in maniera stimolante, la macchina universale di Turing alla base dei fenomeni di indecidibilità. Dopo la scoperta di Turing, il «sogno di Leibniz» – l'invenzione di un calcolo simbolico, una sorta di algebra del pensiero, con cui risolvere automaticamente ogni genere di problemi – si materializza non più in calcolatori in carne e ossa, ma in valvole e fili e poi in rame e silicio. Nel penultimo capitolo, Davis intreccia con chiarezza il bandolo matematico-fondazionale e quello ingegneristico, che sono alla base della tecnologia che ci darà il PC. Il sogno di Leibniz si realizza dunque completamente con i moderni elaboratori elettronici? Sì e no. Sì perché tutti o quasi gli aspetti della mente razionale sono oggi riproducibili fuori della mente umana da qualche programma che altro non è se non una specializzazione del calcolatore universale. No perché gli aspetti che oggi sappiamo essere i più caratterizzanti della mente umana – senso comune, emozioni e coscienza, e non la ragione – esorbitano ancora dalla visione di Leibniz, come limpidamente dimostra Davis nell'ultimo capitolo.

«Era dai tempi di Leibniz, e anche prima, che si pensava alle macchine calcolatrici; ma prima di Turing si era sempre supposto che la macchina stessa, il programma e i dati fossero entità del tutto distinte. La macchina era un oggetto fisico, che oggi chiameremmo lo hardware; il programma era un piano per l'esecuzione del calcolo che poteva materializzarsi in una serie di schede perforate o nelle connessioni volanti tra i punti di contatto di un pannello di controllo; i dati, infine, erano l'ingresso numerico. Ora, la macchina universale di Turing dimostrava che la distinzione tra queste categorie era illusoria. Inizialmente noi possiamo vedere una macchina di Turing come un congegno che ha componenti meccaniche, lo *hardware*. Ma sul nastro della macchina universale il suo codice numerico funziona esattamente come un *programma*, che dà alla macchina stessa le istruzioni dettagliate per una corretta esecuzione del calcolo. Infine, nel suo procedere passo dopo passo, la macchina universale tratta le cifre del codice di una macchina come semplici *dati* sui quali lavorare. Oggi questa fluidità dei tre concetti è fondamentale per l'informatica».

Martin Davis è un logico illustre, nonché l'autore di *Computability and Unsolvability* (1958), un testo del quale è stato detto che è «uno dei pochi veri classici dell'informatica». È professore emerito del Courant Intiute of Mathematical Sciences presso la New York University, tiene frequenti conferenze e attualmente è Visiting Professor presso la University of California a Berkeley.

€ 24,00

Martin Davis

IL CALCOLATORE UNIVERSALE

DA LEIBNIZ A TURING

Traduzione di Gianni Rigamonti

ADELPHI EDIZIONI

TITOLO ORIGINALE:
The Universal Computer
The Road from Leibniz to Turing

WWW.ADELPHI.IT
ISBN 88-459-1792-4

INDICE

PREFAZIONE

Questo libro parla dei concetti fondamentali su cui si basano i nostri attuali calcolatori e delle persone che li crearono. Nella primavera del 1951, poco dopo avere conseguito il dottorato in logica matematica all'Università di Princeton, dove Turing in persona aveva insegnato circa dieci anni prima, tenevo un corso basato sulle sue idee all'Università dell'Illinois, quando un giovane matematico mio allievo mi parlò di due macchine che erano in costruzione dall'altro lato della strada, proprio di fronte all'aula in cui facevo lezione, sostenendo che si trattava di materializzazioni delle idee di Turing. Poco tempo dopo stavo già scrivendo programmi per quei pionieristici calcolatori; tutta la mia carriera professionale, lunga ormai mezzo secolo, ha sempre avuto al suo centro la relazione fra i concetti logici astratti che sono alla base dei calcolatori moderni e la loro realizzazione fisica.

Mentre i calcolatori si sono evoluti, passando dai *behemoth* degli anni Cinquanta, grandi quanto una stanza, alle piccole e potentissime macchine di oggi, capaci di una stupefacente varietà di compiti, la loro logica di base – nata, nel giro di diversi secoli, dall'opera di alcuni pensatori straordinariamente dotati – è rimasta la stessa. Qui racconto le vite di questi uomini e spiego alcuni aspetti del loro pensiero; le storie sono affascinanti di per sé, e spero che i lettori non solo le trovino piacevoli, ma escano dalla lettura con una nozione un po' più precisa di quel che accade dentro il loro PC e con un maggiore rispetto per il valore del pensiero astratto.

Nello scrivere questo libro sono stato aiutato da molti e in vari modi. La John Simon Guggenheim Memorial Foundation mi ha (con mio grande piacere) assicurato un sostegno finanziario nella prima fase degli studi preparatori. Patricia Blanchette, Michael Friedman, Andrew Hodges, Lothar Kreiser e Benson Mates mi hanno generosamente messo a parte delle loro conoscenze specialistiche. Un cortesissimo Tony Sale mi ha fatto da guida a Bletchley Park, dove Turing svolse un ruolo di primo piano nel decrittare i messaggi in codice dei comandi militari tedeschi durante la seconda guerra mondiale. Eloise Segal, che purtroppo non è vissuta abbastanza a lungo da vedere il libro nella sua forma finale, è stata una lettrice attentissima e mi ha aiutato a evitare i trabocchetti di cui l'argomento è disseminato. Mia moglie Virginia si è ostinatamente rifiutata di perdonarmi la benché minima oscurità. Sherman Stein ha letto il manoscritto con grande attenzione, suggerendo numerosi cambiamenti in meglio e salvandomi da diversi errori. Ho potuto utilizzare le traduzioni di Egon Börger, William Craig, Michael Richter, Alexis Manaster Ramer, Wilfried Sieg e François Trèves. Anche altri lettori – Harold Davis, Nathan Davis, Jack Feldman, Meyer Garber, Dick e Peggy Kuhn, Alberto Policriti – mi hanno fatto osservazioni molto utili. Ed Barber, il redattore della W.W. Norton che ha collaborato con me, mi ha mes-

so generosamente a disposizione la sua conoscenza della buona prosa inglese, e molti miglioramenti si devono a lui. Harold Rabinowitz mi ha presentato al mio agente Alex Hoyt, il cui aiuto non mi è mai venuto meno. Naturalmente questo lungo elenco di nomi vuole solo esprimere la mia gratitudine, e non certo scagionarmi dalle mie responsabilità per le carenze del libro. Sarò grato ai lettori per i commenti o le correzioni che vorranno mandarmi all'indirizzo davis@eipye.com.

Berkeley, 2 gennaio 2000

INTRODUZIONE

> Se risultasse che le logiche di base di una macchina progettata per la soluzione numerica di equazioni differenziali coincidono con quelle di una macchina destinata a preparare le fatture di un grande magazzino, penserei che si tratta della più stupefacente coincidenza di tutta la mia vita.
>
> HOWARD AIKEN, 1956[1]

> Torniamo ora all'analogia con le macchine calcolatrici teoriche ... Si può dimostrare che è realizzabile una speciale macchina di questo tipo capace di fare da sola il lavoro di tutte; potremmo addirittura farla funzionare da modello di qualsiasi altra. *Questa macchina speciale può essere chiamata «universale».*
>
> ALAN TURING, 1947[2]

Nell'autunno del 1945, mentre l'ENIAC, un gigantesco «motore da calcolo» con migliaia di valvole termoioniche, stava per essere completato presso la Moore School of Electrical Engineering di Philadelphia, un gruppo di esperti si riuniva a scadenze regolari per discutere il progetto della macchina che doveva succedergli, l'EDVAC. Col passare delle settimane le discussioni divennero sempre più astiose e gli esperti si divisero in due gruppi che essi stessi cominciarono a chiamare «gli ingegneri» e «i logici». John Presper Eckert, capo riconosciuto degli ingegneri, era giustamente orgoglioso di quello che era riuscito a fare con l'ENIAC. Si pensava che fosse impossibile, data la loro dissipazione termica, far funzionare tutte insieme quindicimila valvole termoioniche abbastanza a lungo da ottenere un qualsiasi risultato utile, ma Eckert, grazie a una progettazione molto accurata e insieme molto prudente, era brillantemente riuscito nell'impresa.

Le discussioni giunsero a una svolta quando, con grande disappunto di Eckert, John von Neumann, il più autorevole dei logici e sommo matematico, cominciò a far circolare (con la propria firma) la minuta di un rapporto sul progetto dell'EDVAC in cui era data scarsa attenzione ai dettagli ingegneristici, ma veniva proposta quella struttura *logica* fondamentale del calcolatore che va ancor oggi sotto il nome di «architettura di von Neumann».

Pur essendo una meraviglia dell'ingegneria, sul piano logico l'ENIAC era un disastro. Fu la sua competenza in questo campo (e quello che aveva imparato da un altro logico, l'inglese Alan Turing) a permettere a von Neumann di capire che in realtà una macchina calcolatrice è una macchina logica nei cui circuiti trova corpo un distillato delle intuizioni, elaborate nell'arco di vari secoli, di una straordinaria successione di pensatori. Oggi, mentre la tecnologia informatica avanza a velocità tale da togliere il respiro e ammiriamo le imprese (senz'altro degne di nota) degli ingegneri, è fin troppo facile dimenticare quei logici le cui idee le hanno rese possibili. Questo libro racconta la loro storia.

IL CALCOLATORE UNIVERSALE

A Virginia, compagna della mia vita

I
IL SOGNO DI LEIBNIZ

I giacimenti di minerali dello Harz, regione montuosa situata a sud-est della città tedesca di Hannover, venivano sfruttati sin dalla metà del decimo secolo. Ma poiché le gallerie più profonde si allagavano facilmente, le miniere funzionavano solo finché l'acqua veniva tenuta a bada da pompe. Nel Seicento queste erano azionate da mulini ad acqua. E così d'inverno, quando i fiumi gelavano, l'attività estrattiva, un'importante risorsa economica, doveva interrompersi.

Fra il 1680 e il 1685 la direzione delle miniere ebbe non pochi contrasti col più improbabile dei minatori, G.W. Leibniz, allora sui trentacinque anni, il quale progettava di utilizzare una fonte d'energia ausiliaria, capace di assicurare il pieno funzionamento degli impianti in ogni stagione: i mulini a vento. All'epoca Leibniz aveva già fatto grandi cose: non solo aveva al suo attivo importanti scoperte matematiche, ma era anche famoso come giurista, aveva scritto molti lavori di filosofia e teologia e si era persino recato in missione diplomatica alla corte di

Luigi XIV, il Re Sole, per convincerlo dei vantaggi di una campagna militare in Egitto (anziché contro territori olandesi o tedeschi).[1]

Circa settant'anni prima Cervantes aveva raccontato le disavventure di uno spagnolo malinconico con i mulini a vento, ma Leibniz, a differenza di don Chisciotte, era inguaribilmente ottimista, e a quanti lamentavano le evidenti miserie del mondo replicava che l'onnisciente Iddio, al cui cospetto stava la totalità dei possibili mondi, aveva creato, nella sua infallibilità, il migliore fra essi, i cui lati negativi erano compensati come meglio non si sarebbe potuto da quelli positivi.[2] Senonché il progetto di Leibniz nello Harz si risolse in un fiasco; nel suo ottimismo, non aveva previsto l'ostilità degli ingegneri minerari – gente di lunga esperienza – nei confronti di un novizio che pretendeva di insegnare loro il mestiere, né tenuto conto del periodo di rodaggio richiesto da ogni nuovo impianto o dell'imprevedibilità dei venti. Ma la manifestazione più incredibile del suo ottimismo riguardava quello che immaginava di realizzare con i proventi della sua invenzione.

La visione di Leibniz era di una vastità e grandiosità stupefacenti. La notazione da lui creata per il calcolo differenziale e integrale (in uso ancora oggi) permetteva di eseguire facilmente e quasi senza dispendio di pensiero calcoli complicatissimi, come se fosse la notazione stessa a sbrigare tutto il lavoro; ma egli era convinto che si potesse fare qualcosa di simile anche per l'intera conoscenza umana. Sognava una compilazione enciclopedica, un linguaggio matematico artificiale universale in cui fosse possibile esprimere ogni minima sfaccettatura delle nostre conoscenze; e regole di calcolo che mettessero in luce tutte le interrelazioni logiche esistenti fra le proposizioni di un simile linguaggio. Sognava, infine, macchine capaci di sbrigare questi calcoli lasciando libera la mente di dedicarsi al pensiero creativo.

Certo, l'obiettivo di trasformare un simile sogno in realtà egli non lo poteva raggiungere con le sue sole forze – e, con tutto il suo ottimismo, ne era consapevole –, credeva però fermamente che un ristretto numero di uomini d'ingegno, lavorando assieme in un'accademia scientifica, avrebbe potuto avvicinarsi alla sua realizzazione nel giro di pochi anni; il suo progetto nelle montagne dello Harz doveva servire appunto a finanziare l'istituzione di una siffatta accademia.

L'IDEA MERAVIGLIOSA DI LEIBNIZ

Leibniz nacque nel 1646 a Lipsia, in una Germania frammentata in una miriade di entità politiche separate e devastata da un conflitto che durava ormai da tre decenni – la guerra dei Trent'anni terminò due anni dopo e, benché vi prendessero parte tutte le principali potenze europee, venne combattuta principalmente in terra tedesca. A sei anni perse il padre, professore di filosofia morale all'università; a otto, superando l'opposizione dei precettori, ottenne di accedere alla biblioteca paterna e in breve tempo imparò a leggere correntemente il latino.

Destinato a diventare uno dei massimi matematici di tutti i tempi, il giovane Gottfried apprese i primi elementi di questa disciplina da insegnanti che non avevano idea della rivoluzione matematica in atto in altre parti d'Europa. In Germania perfino la geometria elementare di Euclide era a quei tempi matematica superiore, e veniva studiata solo all'università; ma Leibniz era ancora un ragazzino quando i precettori gli presentarono il sistema logico elaborato da Aristotele oltre due millenni prima, e ciò risvegliò la sua passione e il suo talento per la matematica. Affascinato dalla divisione aristotelica dei concetti in «categorie», concepì di lì a poco quella che avrebbe definito un'«idea meravigliosa»: creare un alfabeto speciale, i cui elementi non stessero per suoni ma per concetti. Un linguaggio basato su un simile alfabeto avrebbe permesso di stabilire, per mezzo di calcoli simbolici, quali dei suoi enunciati erano veri e quali relazioni logiche intercorrevano fra essi. Leibniz non si emancipò mai dall'influsso di Aristotele e a tale visione rimase fedele per il resto della sua vita.

Fu così che all'Università di Lipsia conseguì il titolo di baccelliere con una tesi sulla metafisica aristotelica; nella tesi di *magister philosophiae*, discussa nella stessa università, si occupava invece della relazione tra filosofia e diritto. Evidentemente attratto dagli studi di legge, ottenne un secondo baccellierato, questa volta in giurisprudenza, con una dissertazione in cui insisteva sul ricorso sistematico alla logica nelle questioni giuridiche. Il suo primo contributo originale alla matematica venne tuttavia con la *Habilitationsschrift* (una sorta di seconda tesi di dottorato) in filosofia. Egli aveva compreso che il primo passo del cammino verso un alfabeto dei concetti consisteva nell'enumerare tutte le possibili combinazioni dei concetti medesimi. Questa intuizione lo portò a studiare sistematicamente, prima nella tesi di abilitazione e poi, nel 1666, in una monografia più estesa, la *Dissertatio de arte combinatoria*, il problema di come contare disposizioni complesse di certi elementi di base.[3]

Proseguendo gli studi giuridici, presentò una dissertazione per il dottorato in legge presso l'Università di Lipsia. L'argomento, tipicamente suo, era l'uso esclusivo della ragione nelle questioni giuridiche considerate difficilmente risolvibili con i metodi ordinari. Per ragioni che non sono mai state chiarite, la tesi venne rifiutata, al che Leibniz la ripresentò all'Università di Altdorf, vicino a Norimberga, dove il

Gottfried Wilhelm Leibniz

lavoro venne accolto con tutti gli onori. A ventun anni, completato l'iter degli studi, il giovane si trova di fronte all'eterno problema dei neolaureati: la carriera.

PARIGI

Non essendo interessato a fare il professore in un'università tedesca, Leibniz opta per l'unica vera alternativa, cercarsi un protettore nobile e ricco, e lo trova nel barone Johann Christian von Boineburg, nipote dell'elettore di Magonza von Schönborn, che gli affida il compito di aggiornare il codice di diritto civile, basato ancora sul diritto romano. Poco dopo viene nominato consigliere dell'Alta Corte d'Appello e comincia pure a tessere la tela degli intrighi diplomatici, ivi compresi il tentativo – fallito – di influire sulla scelta del nuovo re di Polonia e una missione diplomatica alla corte di Luigi XIV.

La Francia era uscita dalla guerra dei Trent'anni come la superpotenza del continente europeo. Nel periodo bellico la città di Magonza, costruita in una posizione molto vulnerabile sulle rive del Reno, aveva conosciuto l'occupazione militare; per essa era quindi vitale prevenire eventuali attacchi di eserciti nemici e mantenere buone relazioni con Parigi. Fu in questo contesto che Boineburg e Leibniz architettarono un piano per convincere Luigi XIV e i suoi consiglieri a indirizzare le loro attività militari verso l'Egitto. Tuttavia la conseguenza storica più importante di questo progetto – lo stesso, in sostanza, che più di cent'anni dopo condurrà Napoleone a una sconfitta disastrosa – fu di portare Leibniz a Parigi.

Vi giunse, per l'esattezza, nel 1672, con l'intenzione di propagandare il progetto egiziano e sbrogliare alcune questioni finanziarie del suo protettore, ma verso la fine di quell'anno lo raggiunse la disastrosa notizia della morte di von Boineburg. Ora Leibniz, pur continuando a rendere alcuni servizi alla famiglia del defunto, non aveva più una fonte di reddito sicura; riuscì tuttavia a restare a Parigi per altri quattro anni, estremamente produttivi, durante i quali fu anche due volte, per brevi periodi, a Londra.[4] Nel corso della prima di queste visite, nel 1673, presentò un modello di macchina calcolatrice capace di eseguire le quattro operazioni aritmetiche fondamentali, e venne così ammesso all'unanimità alla Royal Society. Pascal[5] aveva già progettato una macchina in grado di sommare e sottrarre, ma quella di Leibniz era la prima che sapesse anche moltiplicare e dividere; comprendeva un meccanismo molto ingegnoso, la «ruota di Leibniz», che ancora in pieno Novecento era spesso presente nelle macchine calcolatrici. Scrive lo stesso Leibniz: «E ora che ci è consentito rivolgere un ultimo elogio alla macchina, possiamo dire che essa sarà desiderabile per tutti coloro che sono alle prese con calcoli, vale a dire, com'è ben noto, quelli che trattano affari finanziari, amministratori di proprietà altrui, mercanti, agrimensori, geografi, navigatori, astronomi ... Ma limitandoci agli usi scientifici, si potrebbero correggere le vecchie tavole geometriche e astronomiche e costruirne di nuove per mezzo delle quali misurare curve e figure di tutti i generi ... sarà vantaggioso estendere fin dove necessario le tavole pitagoriche principali, le tavole dei quadrati, dei cubi e di altre potenze e quelle delle più diverse combinazioni, variazioni e progressioni ... Anche gli astronomi, sicuramente, non dovranno più armarsi della pazienza indispensabile per i calcoli ... Poiché è indegno di uomini eccellenti perdere ore come schiavi nelle fatiche di calcoli che potrebbero essere tranquillamente affidati a chicchessia, se si usasse questa macchina».[6] La macchina poteva fare solo dell'aritmetica ordinaria, ma Leibniz intuiva che riuscire a meccanizzare il calcolo aveva un significato ben più ampio. Nel 1674 descrisse una macchina capace di risolvere equazioni algebriche, e un anno dopo in un altro scritto paragonò il ragionamento logico a un meccanismo. Il suo intendimento era ormai chiaro: ridurre ogni ragionamento a una sorta di calcolo e costruire, da ultimo, una macchina capace di «calcolare» in questo senso generale.[7]

Per il ventiseienne Leibniz, l'incontro con Christiaan Huygens, che allora viveva a Parigi, fu estremamente importante. Il grande scienziato olandese, allora quarantatreenne, aveva già inventato l'orologio a pendolo e scoperto gli anelli di Saturno; ma il suo contributo più significativo, la teoria ondulatoria della luce, era di là da venire. Per inciso, la sua concezione – che la luce consista in onde simili a quelle che si allargano alla superficie di uno stagno quando vi si getta un sasso – era diametralmente opposta alla teoria corpuscolare di Newton, per il quale era invece un flusso di particelle discrete, paragonabili a pallottole.[8] A Leibniz Huygens diede un elenco di letture, e il giovane poté rapidamente colmare le sue lacune sulla ricerca matematica in atto, alla quale anzi cominciò ben presto a dare sostanziosi contributi.

L'esplosione della ricerca matematica nel Seicento era stata alimentata da due innovazioni decisive:

1. La manipolazione delle espressioni algebriche (l'algebra delle scuole medie) era stata sistematizzata, fino a diventare, in pratica, quella tecnica molto potente che usiamo ancora oggi.

2. Rappresentando i punti come coppie di numeri, Descartes e Fermat avevano mostrato che la geometria era riconducibile all'algebra.

Queste nuove possibilità venivano sfruttate dai matematici per risolvere problemi un tempo inaccessibili. Nei calcoli intervenivano processi di limite; nel senso che alla soluzione si perveniva attraverso approssimazioni successive che si avvicinavano sempre più a essa; l'idea era di non accontentarsi di valori approssimati particolari, ma di «passare al limite», onde ottenere il valore *esatto*.

Per chiarire il concetto, consideriamo uno dei primi risultati dello stesso Leibniz (del quale egli era particolarmente orgoglioso):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

A sinistra del segno = c'è π, il numero che come tutti sanno compare nelle espressioni della lunghezza della circonferenza e dell'area del cerchio;[9] a destra una *serie infinita* in cui vi sono numeri di segno alterno, rispettivamente sommati e sottratti (*termini* della serie); i puntini di sospensione (...) indicano che la serie prosegue indefinitamente. L'intera configurazione consiste di frazioni con numeratore 1 e con denominatori che coprono la successione dei numeri dispari. Com'è chiaro dai primi termini riportati, dopo aver sottratto 1/11 si deve sommare 1/13, poi sottrarre 1/15, e così via, all'infinito. Ma è possibile eseguire realmente un numero infinito di addizioni e sottrazioni? In effetti non è possibile. Tuttavia se, cominciando dall'inizio, ci fermiamo a un punto qualsiasi, otteniamo un'approssimazione alla risposta «vera», approssimazione che diventa sempre migliore man mano che aggiungiamo nuovi termini. Anzi, se ne aggiungiamo a sufficienza possiamo renderla accurata quanto vogliamo. La tabella alla pagina seguente mostra come funziona il procedimento con la serie di Leibniz. Con dieci milioni di termini otteniamo un numero che concorda con il valore vero di $\pi/4$, cioè 0,7853981634..., fino all'ottava cifra decimale.[10]

La serie leibniziana è sorprendente perché stabilisce un legame semplicissimo tra π (e quindi l'area

Numero dei termini	Somma
10	0,76045990
100	0,78289823
1.000	0,78514816
10.000	0,78537316
100.000	0,78539566
1.000.000	0,78539792
10.000.000	0,78539816

Valori approssimati della serie di Leibniz.

del cerchio) e la successione dei numeri dispari. Essa è anche un esempio di un tipo di problema risolvibile con un passaggio al limite, il calcolo dell'are di figure dal contorno curvilineo. Un altro tipo di problema in cui il passaggio al limite riveste un ruolo essenziale è il calcolo esatto di un rapporto incrementale in un punto, per esempio della velocità di un corpo in moto non uniforme. Negli ultimi mesi del 1675, verso la fine del soggiorno parigino, Leibniz fece importanti passi in avanti – concettuali e computazionali – nell'uso dei passaggi al limite; questi risultati nel loro insieme costituiscono l'invenzione leibniziana del calcolo infinitesimale. Per l'esattezza Leibniz:

1. Riconobbe che il calcolo delle aree e la determinazione dei rapporti incrementali puntuali erano casi paradigmatici, nel senso che molti differenti tipi di problemi erano riconducibili all'uno o all'altro.[11]

2. Comprese che, in modo molto simile alle operazioni di addizione e sottrazione o di moltiplicazione e divisione, le operazioni matematiche richieste per calcolare le soluzioni dei summenzionati tipi di problemi erano l'una *l'inversa* dell'altra. Oggi queste operazioni sono dette rispettivamente *integrazio-*

ne e derivazione e la proprietà in questione è nota come «teorema fondamentale del calcolo infinitesimale».

3. inventò un simbolismo molto efficace (usato ancora oggi) e cioè $\int$ per l'integrazione e d per la derivazione;[12] infine, scoprì le regole matematiche per eseguire concretamente le integrazioni e derivazioni che si presentavano nella pratica.

Nel loro insieme, queste scoperte trasformarono i passaggi al limite, un metodo esoterico e accessibile a pochi iniziati, in una tecnica semplice e chiara, che poté essere insegnata a generazioni di studenti.[13] Ma la cosa più importante, per l'argomento di questo libro, è che Leibniz si convinse che era fondamentale scegliere simboli adatti e trovare regole che ne governassero la manipolazione. Diversamente dalle lettere di un alfabeto fonetico, i simboli $\int$ e d non erano suoni privi di significato ma stavano per concetti, e fornivano quindi un modello di quell'idea meravigliosa, affacciatasi alla sua mente fin da ragazzo, di un alfabeto che rappresentasse *tutti* i concetti fondamentali.

Molto si è scritto sulla scoperta del calcolo infinitesimale – ottenuta indipendentemente e per vie del tutto diverse – da parte di Leibniz e Newton, come sulle accuse velenose di plagio che rimbalzarono da una sponda all'altra della Manica (prima che a tutti fosse chiara la stupidità delle accuse medesime). Quel che conta, per la storia che sto raccontando, è la netta superiorità della notazione leibniziana.[14] In tale notazione, ad esempio, la fondamentale tecnica di integrazione nota come «metodo di sostituzione» è praticamente automatica, mentre è alquanto macchinosa in quella di Newton. Qualcuno, addirittura, ha visto nella devozione servile ai metodi del loro eroe nazionale la causa del grave ritardo dei matematici inglesi, rispetto ai loro colleghi del continente, nel portare avanti le nuove possibilità aperte dal calcolo infinitesimale.

Come tanti che avevano avuto modo di assaporare il gusto peculiare della vita parigina, Leibniz desiderava restare nella capitale francese il più a lungo possibile. Cercò dunque di tenersi buone le sue amicizie tedesche pur continuando a vivere e lavorare a Parigi. Ben presto però capì che così facendo rischiava di non veder più arrivare un soldo da Magonza. Nel frattempo gli era giunta una proposta da uno dei numerosi staterelli in cui era divisa la Germania, il ducato di Hannover; ma, benché il duca Johann Friedrich avesse genuini interessi intellettuali e l'offerta fosse economicamente interessante, Leibniz non aveva molta voglia di trasferirsi nella città tedesca. Così prese tempo finché glielo permisero le sue finanze, e solo all'inizio del 1675 accettò, con una lettera in cui chiedeva «licenza di proseguire i suoi studi di arti e scienze a beneficio dell'umanità».[15] Tuttavia non lasciò Parigi fino all'autunno del 1676, quando gli fu chiaro che lì non aveva alcuna prospettiva e che il duca non avrebbe accettato altri rinvii. Da allora avrebbe trascorso il resto della sua vita al servizio della casa di Hannover.

HANNOVER

Leibniz si rendeva ben conto che, nonostante avesse posto quella condizione, per mantenere il nuovo incarico avrebbe dovuto fare cose che il suo protettore trovasse pratiche e utili. Cominciò così a riordinare la biblioteca ducale e fece una serie di proposte volte a rendere più efficienti la pubblica amministrazione e l'agricoltura. Poco dopo lanciò l'idea dei mulini a vento per aumentare la redditività delle miniere dello Harz; ma nel 1680, appena un anno dopo che il progetto (che lui stesso avrebbe dovuto dirigere) era stato finalmente approvato, la morte improvvisa del duca mise a rischio la sua posizione.

Si trattava ora di convincere il nuovo duca Ernst August a confermargli l'incarico e ad appoggiare il progetto. Ernst August era un uomo pratico, poco disposto, a differenza dei predecessori, a fare grandi spese per la biblioteca, e Leibniz imparò molto rapidamente a non coinvolgerlo in conversazioni erudite. Così, per rendere un po' più sicura la propria posizione si offrì di scrivere una breve storia della famiglia ducale, e cinque anni dopo, quando il suo patrono si decise finalmente a chiudere il progetto dello Harz, ne propose una versione più elaborata – se si riusciva a colmare qualche lacuna, l'albero genealogico poteva risalire fino al Seicento. Evidentemente il duca riteneva che questo fosse il modo migliore di impiegare uno dei più grandi pensatori di tutti i tempi; né si mostrò avaro, tanto che per la sua nuova mansione Leibniz ottenne un regolare stipendio, un segretario personale e fondi per i viaggi destinati alla ricerca di notizie genealogiche. Molto probabilmente, ottimista com'era, non immaginava che sarebbe rimasto incatenato alla genealogia ducale per i trent'anni che gli restavano da vivere (Georg Ludwig, succeduto a Ernst August nel 1698, si mostrò inflessibile e non smise mai di tormentarlo perché completasse la storia di famiglia).

Leibniz era ben lontano dal condividere i diffusi luoghi comuni del tempo sulle capacità intellettuali femminili; i suoi allievi più assidui, a Hannover, erano donne. Con la duchessa Sophie, moglie di Ernst August e persona di grande intelligenza, parlava spesso di filosofia, e i due tenevano una fitta corrispondenza quando il filosofo era assente da Hannover. La duchessa desiderava che anche la figlia Sophie Charlotte, futura regina di Prussia, approfittasse dei suoi insegnamenti, ed essa, lungi dal limitarsi a far tesoro della erudizione di Leibniz, gli poneva instancabilmente domande che lo aiutavano a chiarire a se stesso le proprie idee.

«Per la maggior parte della sua vita» scrive Benson Mates, odierno studioso di Leibniz, «furono soprattutto queste due donne a perorare la causa di Leibniz alle corti di Hannover e Berlino. L'improvvisa morte di Sophie Charlotte, nel 1705, fu un colpo devastante, e Leibniz ne fu talmente addolorato che persino emissari di potenze straniere gli fecero formalmente le condoglianze; quando poi nel 1714 ... morì la duchessa Sophie, egli non fu più in grado di ottenere nessun sostegno economico, se non per continuare la storia dei Brunswick».[15]

Il progetto storiografico aveva comunque dato a Leibniz un pretesto per viaggiare, benché egli abusasse di tale libertà al punto da irritare i suoi nobili patroni. Ovviamente ne approfittò per avviare o mantenere contatti con altri studiosi, e a Berlino fondò addirittura una società scientifica che in seguito venne ufficializzata e diventò un'accademia. La sua estesissima corrispondenza continuava a coprire tutto l'arco dei suoi interessi; Leibniz non sembrava mai stanco di spiegare che, siccome Dio aveva creato il migliore dei mondi possibili, doveva esservi un'*armonia prestabilita* fra l'esistente e il possibile e per ogni cosa presente nel mondo c'era (che fossimo o meno in grado di scoprirla) una *ragione sufficiente*. In campo diplomatico coltivava in particolare due progetti, riunificare le chiese cristiane e ottenere la successione al trono d'Inghilterra per i duchi di Hannover. Due anni prima della morte di Leibniz, tuttavia, Georg Ludwig, diventato re d'Inghilterra col nome di Giorgio I, respinse ruvidamente la sua richiesta di consentirgli di lasciare l'aria stagnante di Hannover e di accoglierlo a Londra, e gli ingiunse di sbrigarsi a terminare la storia della dinastia.

LA CARATTERISTICA UNIVERSALE

Che ne fu dell'idea meravigliosa del giovane Leibniz, del suo audace sogno di trovare un autentico alfabeto del pensiero umano e gli strumenti di calcolo adatti a manipolare i suoi simboli? Pur essendosi rassegnato all'idea di non poter realizzare questo progetto da solo, egli non perse mai di vista l'obiettivo e continuò a pensarci e scriverne per tutta la vita. Gli era chiaro che sia i segni speciali usati in aritmetica e algebra, sia i simboli della chimica e dell'astronomia, sia quelli introdotti da lui stesso per il calcolo differenziale e integrale rappresentavano altrettanti paradigmi che mostravano tutta l'importanza di un simbolismo ben scelto. Nella terminologia di Leibniz un sistema simbolico con queste proprietà era una *caratteristica*; ciascuno degli esempi citati era una *caratteristica reale*, in cui ogni singolo simbolo rappresentava un'idea ben definita in modo naturale e adeguato – a differenza dei simboli, privi di significato, dell'alfabeto. Ma quello di cui c'era bisogno, pensava Leibniz, era una *caratteristica universale*, cioè un sistema di simboli che non solo fosse «reale» ma abbracciasse anche il pensiero umano in tutta la sua estensione.

In una lettera al matematico G.F.A. L'Hôpital, scrisse che «parte del segreto dell'algebra» consisteva nella caratteristica, vale a dire nell'«arte di usare correttamente» le espressioni simboliche. Questa attenzione all'uso corretto dei simboli sarebbe stata il filo d'Arianna che avrebbe guidato lo studioso nella creazione della caratteristica stessa.

«È la notazione algebrica» spiegava all'inizio del

Novecento il logico e studioso di Leibniz Louis Couturat «a incarnare, per così dire, l'ideale della caratteristica e a servire da modello; ed è ancora l'algebra che Leibniz porta ad esempio per mostrare come un sistema di simboli ben scelti sia utile e anzi indispensabile per il pensiero deduttivo».[17]

La descrizione più entusiastica della caratteristica da lui ipotizzata si trova forse in una lettera a Jean Galloys, uno studioso con il quale aveva frequenti contatti epistolari: «Sono sempre più convinto dell'utilità e realtà di questa scienza generale, e vedo che pochissime persone ne hanno compreso la portata ... Questa caratteristica consiste in una certa scrittura o lingua ... che rappresenta perfettamente le relazioni fra i nostri pensieri. I caratteri sarebbero diversissimi da tutto ciò che è stato immaginato finora; si è dimenticato, infatti, il principio che i caratteri di questa scrittura devono servire all'invenzione e al giudizio, come in algebra e in aritmetica. Tale scrittura avrà grandi vantaggi, ma fra gli altri ce n'è uno che a me sembra particolarmente importante, e cioè che usando questi caratteri sarà impossibile scrivere chimere come quelle che a volte ci si presentano alla mente. Un ignorante o non sarà in grado di usare questa scrittura, o cercando di usarla diventerà un erudito».[18]

Nel fare riferimento all'aritmetica e all'algebra come discipline che dimostrano quanto sia importante un buon simbolismo, Leibniz aveva in mente soprattutto i vantaggi della numerazione araba basata sulle cifre da 0 a 9, che usiamo ancor oggi, rispetto ai precedenti sistemi (come i numeri romani) utilizzati normalmente nei calcoli. Quando scoprì la notazione binaria, che permetteva di scrivere qualsiasi numero usando solo 0 e 1, fu particolarmente colpito dalla sua semplicità. Pensava addirittura che potesse servire a mettere in luce proprietà dei numeri che altrimenti sarebbero rimaste nascoste; e anche se tale convinzione risultò ingiustificata, l'importanza della notazione binaria nei moderni calcolatori ci fa apparire degno di nota questo suo interesse.

Leibniz divideva il suo grande programma in tre parti principali. Innanzitutto non era possibile scegliere simboli adeguati se prima non si creava un compendio, anzi un'*enciclopedia*, che abbracciasse la conoscenza umana in tutta la sua estensione; una volta arrivati a tanto sarebbe poi stato possibile anche il secondo passo, cioè la scelta delle nozioni fondamentali e cruciali e dei simboli a esse adeguati; infine, si sarebbero potute ridurre le regole deduttive a manipolazioni di questi simboli, ovvero a quello che Leibniz chiamava *calculus ratiocinator* e che oggi potremmo chiamare logica simbolica. Per un lettore dei giorni nostri non è certo sorprendente che Leibniz ritenesse di non poter realizzare un simile programma con le sue sole forze (soprattutto considerando le continue e pressanti richieste di completare quella storia di famiglia che per il duca doveva essere il suo compito principale), ma ancor più difficile è capire come egli potesse veramente credere che l'universo in cui viviamo, con tutta la sua complessità, fosse riducibile a un unico calcolo simbolico.

Possiamo soltanto sperare di *cominciare* a comprendere quel progetto cercando di vedere il mondo con gli occhi di Leibniz. Per lui nell'universo non c'era nulla di indeterminato o accidentale, ma tutto era conforme a un piano perfettamente chiaro nella mente di Dio, il quale aveva creato il migliore dei mondi possibili; di conseguenza tutti gli aspetti del mondo, naturali e soprannaturali, erano collegati da relazioni che vi era la speranza di scoprire con gli strumenti della ragione. Solo ponendoci in questa prospettiva riusciremo a capire quel che intendeva Leibniz scrivendo, in un passo diventato famoso, che «uomini seri e di buona volontà», seduti intorno a un tavolo per risolvere qualche spinoso problema, potranno formularlo nella caratteristica universale, il linguaggio da lui ipotizzato. A quel punto diranno: «Calcoliamo!», tireranno fuori la penna e troveranno una soluzione che non potrà non essere accettata da tutti.[19]

Leibniz parlava con entusiasmo dell'importanza di questo *calculus ratiocinator*, di questa algebra della logica di cui ci sarebbe stato, verosimilmente, bisogno per effettuare simili calcoli: «Se infatti si dà lode a coloro che hanno determinato il numero dei solidi regolari, che non ha uso alcuno se non in quanto il contemplarlo dà diletto, e se il portare alla luce le proprietà più eleganti di una concoide o cissoide o altra figura che raramente trova applicazione è considerato esercizio degno d'un genio matematico, di quanto sarà meglio assoggettare a leggi matematiche il ragionamento umano, che è la cosa più eccellente e utile che possediamo!».[20]

Leibniz, che parlava con tanta passione e convinzione della caratteristica universale, all'atto pratico fece però ben poco per realizzarla; cercò invece più volte di produrre un *calculus ratiocinator*. Alla pagina seguente presento un frammento del suo tentativo meglio rifinito.[21] Quella che Leibniz propone – in anticipo di un buon secolo e mezzo sui tempi – è un'algebra della logica che specifichi le regole di manipolazione dei concetti logici, così come l'algebra ordinaria specifica le regole di manipolazione dei numeri. Leibniz introduce un simbolo speciale, ⊕, che rappresenta la combinazione di molteplicità di oggetti del tutto arbitrarie; il concetto, in sostanza, è di combinare due collezioni in una collezione unica che contenga tutti gli elementi dell'una e dell'altra. Il segno + suggerisce un'analogia con la somma ordinaria, ma il cerchietto in cui è racchiuso avverte che questa non è in tutto e per tutto addizione ordinaria, perché quelli che vengono sommati non sono numeri. Alcune delle regole di Leibniz si trovano

DEFINIZIONE 3 [Dire che] A è in L o che L contiene A è lo stesso che dire che L può essere fatto coincidere con una pluralità di termini, assunti insieme, uno dei quali è A. $B \oplus N = L$ significa che B è in L e che B e N insieme compongono o costituiscono L. Questo vale anche di un numero di termini più grande.

ASSIOMA 1 $B \oplus N = N \oplus B$.

POSTULATO Più termini qualsiasi come A e B possono essere assunti insieme per comporre un termine solo $A \oplus B$.

ASSIOMA 2 $A \oplus A = A$.

PROPOSIZIONE 5 *Se A è in B e $A = C$, C è in B.*
Infatti, sostituendo C ad A nella proposizione *A è in B*, si ottiene *C è in B*.

PROPOSIZIONE 6 *Se C è in B e $A = B$, C è in A.*
Infatti, sostituendo A a B nella proposizione *C è in B*, si ottiene *C è in A*.

PROPOSIZIONE 7 *A è in A.*
Infatti A è in $A \oplus A$ (per la definizione 3), e quindi (per la proposizione 6) A è in A.

...

PROPOSIZIONE 20 *Se A è in M e B è in N, $A \oplus B$ è in $M \oplus N$.*

Frammento di un calcolo logico di Leibniz.

anche nei manuali di algebra dei licei, perché in qualche misura per i concetti logici e i numeri valgono le stesse leggi. Tuttavia c'è dell'altro: vi sono anche regole diversissime da quelle dei numeri. L'esempio più stupefacente – lo stesso che, in un contesto abbastanza diverso, diventerà la pietra angolare dell'algebra della logica di George Boole – è l'assioma 2: $A \oplus A = A$, che esprime il fatto che combinando una molteplicità di termini con se stessa non si ottiene niente di nuovo (è chiaro che combinando tutte le cose appartenenti a una collezione data con quella stessa collezione produrremo, di nuovo, solo la collezione di partenza). Ovviamente l'addizione numerica è del tutto diversa: $2+2$ è uguale a 4, non a 2.

Nel prossimo capitolo vedremo come George Boole, il quale presumibilmente ignorava i tentativi leibniziani, abbia creato una logica simbolica, utilizzabile nella pratica, con la stessa impostazione di cui Leibniz era stato pioniere. La logica di Boole sussumeva come sua parte quella introdotta duemila anni prima da Aristotele, ma le gravi limitazioni che il sistema aristotelico e quello booleano avevano in comune furono veramente superate solo nella seconda metà dell'Ottocento con l'opera di Gottlob Frege.[22]

Nonostante la sua voluminosa corrispondenza, ignoriamo quasi del tutto che tipo di persona fosse Leibniz. Uno dei suoi biografi afferma di vedere nei pochi ritratti che possediamo l'immagine di un uomo stanco, infelice e pessimista – in contraddizione, dunque, con la filosofia ottimistica da lui professata;[23] altri raccontano che soleva offrire dolci ai bambini dei vicini; e sembra che a cinquant'anni avesse fatto delle avance matrimoniali a una signora ma poi ci avesse ripensato nel vedere che la donna esitava.[24] Ci resta l'immagine di un uomo che passava le giornate, e spesso notti intere, seduto alla scrivania a sbrigare, con notevole puntualità, la sua corrispondenza, mentre i domestici gli portavano i pasti da una locanda. Senza dubbio era un lavoratore instancabile.[25]

Che cosa sarebbe accaduto se Leibniz, anziché trovarsi legato a filo doppio alla storia di famiglia dei suoi protettori, avesse avuto più tempo da dedicare al *calculus ratiocinator*? Avrebbe potuto realizzare quello che Boole riuscì a fare solo molto tempo dopo? Sono, ovviamente, domande inutili. Quello che ci ha lasciato è il suo sogno, ma anche un sogno può riempirci di ammirazione per la potenza del pensiero speculativo umano e fare da pietra di paragone per giudicare ciò che è venuto dopo.

II
BOOLE TRASFORMA LA LOGICA IN ALGEBRA

LA DURA VITA DI GEORGE BOOLE

La bella e intelligente principessa Caroline von Ansbach, che un giorno, quale moglie di Giorgio II, sarebbe diventata regina d'Inghilterra, conobbe Leibniz a Berlino nel 1704, a diciotto anni. Dopo che si fu trasferita oltre Manica con la corte, la sua amicizia col filosofo proseguì per via epistolare; Caroline cercò di convincere il suocero Giorgio I a chiamarlo a Londra ma il re, come abbiamo già visto, fu irremovibile nel pretendere che egli rimanesse in Germania a completare la storia di famiglia della casa di Hannover.

Caroline si trovò coinvolta nell'assurda e interminabile disputa tra Leibniz e Newton (e i newtoniani) in merito alla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale, e tentò, invano, di convincere il suo protetto che la faccenda non era poi così importante. Leibniz cercò pure il suo appoggio presso il re per la sua aspirazione alla nomina di Storiografo d'Inghilterra, così da essere alla pari con Newton, che era Maestro della Zecca – nonché unico modo secondo lui per salvare l'onore della Germania agli occhi degli inglesi. Le scrisse anche che quando Newton affermava che un granello di sabbia esercitava una forza gravitazionale sul Sole, così lontano, senza poter indicare un mezzo chiaramente capace di trasmettere questa forza, di fatto invocava qualcosa di miracoloso per spiegare un fenomeno naturale: cosa, a suo dire, del tutto inammissibile. Per parte sua Caroline si preoccupò di far tradurre in inglese una parte degli scritti leibniziani, venendo così in contatto con Samuel Clarke, che le era stato indicato come possibile traduttore.

Clarke era filosofo, teologo, discepolo di Newton (devotissimo al maestro), e in una Boyle Lecture del 1704, *A Demonstration of the Being and Attributes of God* (pubblicata nel 1705), aveva costruito una prova dell'esistenza di Dio. Caroline gli mostrò una lettera di Leibniz in cui venivano attaccate alcune idee newtoniane e gli chiese di rispondere; ne nacque una corrispondenza fra i due che durò fino a pochi giorni prima della morte di Leibniz, ma non portò mai – e non sorprende – a una convergenza di idee. Per la nostra storia la cosa più interessante, a proposito di Clarke, è che quasi un secolo e mezzo dopo la morte di Leibniz George Boole avrebbe dimostrato l'efficacia dei propri metodi prendendo come esempio la sua prova dell'esistenza di Dio: in effetti, egli riuscì così bene a dar vita a una parte del sogno di Leibniz da ridurre la complicata deduzione di Clarke a un semplice insieme di equazioni.[1]

Nel passare dal mondo di Leibniz e della nobiltà europea del Seicento a quello di Boole, oltre ad avanzare di quasi due secoli nel tempo scendiamo anche parecchi gradini della scala sociale. George, primo di quattro figli, nacque il 2 novembre 1815 a Lincoln, nell'Inghilterra orientale. Nei primi nove anni di matrimonio i genitori, John e Mary, non avevano avuto figli. Il padre, di mestiere calzolaio, con i suoi magri guadagni sbarcava a stento il lunario, ma aveva una grande passione per lo studio e soprattutto per gli strumenti scientifici, tanto che nella vetrina della sua bottega esponeva con orgoglio un telescopio che lui stesso aveva costruito. Purtroppo non aveva fiuto per gli affari, e il figlio George, ragazzo coscienzioso e pieno di talento, si trovò ben presto sulle spalle il peso dell'intera famiglia.[2]

Nel giugno del 1830 i lettori del «Lincoln Herald», il quotidiano locale, vennero informati di una insulsa polemica sull'originalità di una traduzione inglese di Meleagro, antico poeta greco. Nel pubblicare la traduzione, il giornale l'aveva attribuita a «G. B., di anni 14, Lincoln», al che un certo signor P. W. B. si era preso il disturbo di scrivere alla redazione accusando G. B. di plagio. Ammetteva di non sapere da dove G. B. potesse averla copiata, ma considerava assolutamente inverosimile che potesse essere opera di un ragazzo di quattordici anni. Seguì un nutrito scambio di lettere, puntualmente pubblicate sul giornale, fra G. B. e P. W. B.

La famiglia di George non tardò a riconoscere le capacità del ragazzo, ma era troppo povera per garantirgli un'istruzione regolare, e George restò in sostanza un autodidatta (ma con l'aiuto, molto importante, del padre). Studiò non solo latino e greco, ma anche francese e tedesco, tanto che – naturalmente molti anni dopo – riuscì anche a scrivere lavori matematici (a livello di ricerca) in queste lingue. Non appartenne mai a una vera e propria confessione religiosa, e trovava impossibile accettare la divinità di Cristo, ma aveva, a modo suo, una forte religiosità. Comunque abbandonò ben presto l'idea originaria di diventare pastore anglicano, in parte per le sue convinzioni, ma soprattutto perché il padre aveva dovuto chiudere bottega, e i suoi avevano urgente bisogno di un aiuto economico. George non aveva ancora sedici anni quando cominciò a insegnare in una piccola scuola metodista a circa ses-

George Boole

santacinque chilometri da casa, ma dopo due anni fu licenziato, a quanto pare per il suo comportamento irreligioso: studiava matematica anche di domenica, e perfino nella cappella! In effetti fu in questo periodo che George cominciò a orientarsi sempre di più verso gli studi matematici. Molti anni dopo, ricordando quella stagione della sua vita, spiegò che per chi, come lui, aveva pochissimi soldi da spendere in libri, quelli di matematica erano l'investimento migliore – duravano di più degli altri. Amava anche raccontare di come, all'epoca della scuola, gli fosse venuta un'ispirazione: mentre camminava in un prato, gli era balenata l'idea che doveva essere possibile esprimere le relazioni logiche in forma algebrica. Una sorta di illuminazione sulla via di Damasco – scriverà un suo biografo –, i cui frutti, peraltro, si sarebbero avuti solo molti anni dopo.[3]

Dopo l'esperienza della scuola metodista, Boole trovò un posto da insegnante a Liverpool, ma appena sei mesi più tardi sentì che non gli era più possibile restare, per via (parole della sorella) dello «spettacolo di appetiti e passioni grossolani cui si indulgeva senza freni», presumibilmente da parte del preside.[4] Anche l'impiego successivo fu di breve durata. Finalmente, a diciannove anni, decise di aprire una propria scuola a Lincoln, sua città natale, così da assicurare alla famiglia la tranquillità economica, e per quindici anni, cioè fino a quando accettò una cattedra all'Università di Cork (appena istituita), fece, con ottimi risultati, l'insegnante e il preside insieme. Le sue scuole (ne fondò e diresse tre, una dopo l'altra) erano l'unica fonte di reddito per genitori e fratelli, anche se negli ultimi anni ebbe l'aiuto della sorella Mary Ann e del fratello William.

Dirigere una scuola-convitto e nel contempo insegnare ai ragazzi sembrerebbe richiedere un impegno a tempo pieno, eppure in quel periodo Boole riuscì a trasformarsi da studioso di una matematica già esistente in matematico creativo. Addirittura trovò il tempo per attività socialmente utili: fu socio fondatore e amministratore, sempre a Lincoln, di un istituto di rieducazione femminile, «ove le donne che si erano allontanate dal cammino della virtù trovassero temporaneamente asilo e potessero, grazie all'opera di educazione morale e religiosa e alla acquisizione di abitudini laboriose, tornare ad avere una posizione rispettata nella società». Il biografo di Boole parla di prostitute (numerose, a quanto pare, nella Lincoln vittoriana),[5] ma è più probabile si trattasse, come spesso avveniva, di giovani della classe lavoratrice sedotte e abbandonate dopo aver creduto alle false promesse di matrimonio di un «fidanzato» della loro stessa classe sociale.[6] Possiamo capire qualcosa dell'atteggiamento personale di George Boole verso il sesso da quello che disse in due conferenze di argomento non matematico. Nella prima (sull'educazione) ammoniva: «Gran parte della letteratura della Grecia e di Roma giunta fino a noi ... è insozzata da allusioni, e troppo spesso più che da allusioni, dai vizi del paganesimo ... Ma io non credo affatto che l'innocenza della gioventù possa essere esposta alla contaminazione del male senza pericolo».[7] In un'altra sul buon uso del tempo libero (tenuta dopo una vittoriosa campagna della Lincoln Early Closing Association per la giornata lavorativa di dieci ore) leggiamo queste dure parole: «Se cercate gratificazione in quelle imprese dalle quali la virtù si distoglie, non avete scuse».[8]

Boole, seguendo le orme paterne, era molto impegnato anche nel Lincoln Mechanics' Institute. Questi istituti per meccanici, che erano soprattutto scuole serali per artigiani e altri lavoratori, erano sorti in tutta la Gran Bretagna vittoriana. In quello di Lincoln Boole si occupava di problemi organizzativi, faceva proposte per un miglior funzionamento della biblioteca, teneva conferenze e insegnava, a titolo gratuito, diverse materie.

Pur con tutte queste attività egli trovò, in qualche modo, il tempo per studiare i più importanti trattati matematici inglesi e continentali e cominciare a produrre lavori suoi. Buona parte dei suoi scritti giovanili testimoniano di una fede leibniziana nella capacità di un ben congegnato formalismo matematico di produrre automaticamente, come per magia, la risposta corretta a ogni problema. Leibniz aveva fatto l'esempio dell'algebra, e in Inghilterra, proprio mentre iniziava la fase creativa di Boole, si cominciava a capire che la potenza dell'algebra nasceva dal fatto che i simboli scelti in rappresentanza di quantità e operazioni ubbidivano a un piccolo numero di regole o leggi di base. Ciò implicava che quegli stessi potentissimi metodi erano applicabili a oggetti e operazioni dei tipi più diversi, purché questi ubbidissero almeno ad alcune di dette leggi.[9]

Nei suoi primi lavori Boole applicò metodi algebrici a oggetti, detti *operatori* dai matematici, che «operano» sulle espressioni dell'algebra ordinaria ricavandone nuove espressioni. Gli interessavano soprattutto gli *operatori differenziali*, così chiamati perché hanno a che fare con l'operazione di differenziazione/derivazione del calcolo infinitesimale di cui ho parlato nel capitolo precedente.[10] Questi operatori erano considerati particolarmente importanti perché molte delle leggi fondamentali dell'universo fisico hanno la forma di equazioni differenziali – ove entrano in gioco, per l'appunto, operatori differenziali –, e Boole dimostrò che certi tipi di equazioni differenziali si potevano risolvere applicando ai rispettivi operatori i metodi dell'algebra ordinaria. Oggi gli studenti di ingegneria e di scienze imparano queste tecniche al primo o secondo anno di università.

Negli anni in cui lavorava come insegnante Boole pubblicò una dozzina di articoli (a livello di ricerca) sul «Cambridge Mathematical Journal»; propose addirittura per la pubblicazione un lunghissimo scritto alle «Philosophical Transactions of the Royal Society». La prestigiosa istituzione, dapprima riluttante a prendere in considerazione il lavoro di uno sconosciuto, finì poi per accettarlo e in seguito lo premiò addirittura con una medaglia d'oro.[11] Il metodo di Boole consisteva nell'introdurre una determinata tecnica e nell'applicarla a un certo numero di esempi; in genere come *prova* della correttezza dei suoi procedimenti gli bastava che questi esempi funzionassero.[12]

Fu in questo periodo che avviò rapporti epistolari, sia professionali sia di amicizia, con alcuni dei più brillanti giovani matematici inglesi; e fu proprio una disputa tra il filosofo scozzese William Hamilton e uno di questi nuovi amici, Augustus De Morgan, a fargli tornare in mente l'idea, balenatagli molto tempo prima, che si potessero esprimere le relazioni logiche come un'algebra *sui generis*. La litigiosità di Hamilton, nonostante la grande erudizione filosofica, aveva qualcosa di folle, e le sue critiche astiose contro la matematica potevano essere spiegate solo da una colossale ignoranza in materia. A mandarlo su tutte le furie era stata una pubblicazione di De Morgan sulla logica che a suo dire plagiava quella che egli considerava la sua grande scoperta in questo campo: la «quantificazione del predicato». Non c'è bisogno che perdiamo tempo per cercare di capire il significato di tale idea o l'accesa controversia che generò – importante, qui, solo per gli stimoli che fornì a George Boole.[13]

La logica classica di Aristotele, che tanto aveva affascinato il giovane Leibniz, studiava enunciati come:

1. Tutte le piante sono viventi.
2. Nessun ippopotamo è intelligente.
3. Alcune persone parlano inglese.

Boole comprese che, ai fini del ragionamento logico, l'aspetto significativo di parole come «viventе», «ippopotamo» o «persona» era la *classe* o *collezione* di tutti gli individui descritti dalla parola stessa (la *classe* degli esseri viventi, la *classe* degli ippopotami, la *classe* delle persone), e trovò inoltre un modo per formulare questo tipo di ragionamenti per mezzo di un'*algebra* di tali classi. Indicava le classi mediante lettere, nello stesso identico modo in cui già erano usate per rappresentare operatori o numeri: se per esempio le lettere x e y stavano per due classi determinate, scriveva xy per indicare l'insieme degli oggetti che stavano tanto in x quanto in y. Ma diamo la parola a Boole: «... se come termine di una descrizione usiamo un aggettivo, per esempio "buono", con una lettera, y, rappresenteremo tutte quelle cose alle quali può applicarsi la descrizione "buono", vale a dire "tutte le cose buone", o la classe "cose buone". Conveniamo inoltre di rappresentare con la combinazione xy la classe di cose a cui sono applicabili, simultaneamente, i nomi o le descrizioni rappresentati da x e da y. Così se x da solo sta per "cose bianche", e y sta per "animali", xy starà per "animali bianchi"; analogamente, se z sta per "cose dotate di corna" ... zxy rappresenterà "animali bianchi dotati di corna"».[14]

Per Boole questa operazione sulle classi era simile, per certi versi, alla moltiplicazione numerica ordinaria. Si avvide però di una differenza cruciale: se y è, ancora una volta, la classe delle pecore, yy che cos'è? Non può che essere la classe di quelle cose che sono pecore e anche ... pecore, solo che questa è sempre la classe delle pecore, e dunque $yy = y$. Non sbagliamo di molto se diciamo che egli basò tutto il suo sistema logico sul fatto (sul quale torneremo più avanti) che quando x sta per una classe l'equazione $xx = x$ è sempre vera.[15]

Nel 1847, quando fu pubblicata la sua rivoluzionaria monografia sulla logica come disciplina matematica, George Boole aveva trentadue anni; sette anni dopo ne diede un'esposizione più accurata nell'*Indagine sulle leggi del pensiero*. Fu un periodo di novità importanti per la sua vita. La modesta condizione sociale e il non aver compiuto studi regolari gli negavano, in apparenza, qualsiasi possibilità di trovare posto in un'università inglese. Ad aprirgli una via fu, stranamente, la questione irlandese. Tra le molte cose che gli irlandesi rimproveravano al dominio inglese c'era il fatto che l'unica università del Paese, il Trinity College di Dublino, era protestante. Il governo britannico cercò di calmare il malcontento proponendo l'istituzione di tre nuove università, tutte col nome di Queen's College e – cosa notevole per l'epoca – non confessionali, a Cork, Belfast e Galway. Il progetto, nonostante le denunce di autorevoli personalità politiche e religiose dell'isola, che chiedevano istituzioni dichiaratamente cattoliche, andò in porto. Boole decise di fare domanda per una di queste università e tre anni dopo, nel 1849, venne finalmente nominato professore di matematica al Queen's College di Cork.

Nel 1849 l'Irlanda aveva appena superato la fase peggiore di una vera e propria catastrofe. Un fungo devastante aveva distrutto quasi per intero il raccolto delle patate, la base dell'alimentazione dei poveri dell'isola, e molti di quelli che non erano morti di fame erano stati uccisi dal tifo, dalla dissenteria, dal colera o dalle febbri periodiche cui li esponeva un sistema immunitario indebolito. Le autorità britanniche, senza capire quale fosse la causa del disastro, ne davano la colpa alla presunta indolenza degli irlandesi; e questa diagnosi sociale veniva usata per giustificare le continue esportazioni di generi alimentari dall'isola, mentre milioni persone soffrivano la fame. Fra il 1845 e il 1852 morirono non meno di un milione di irlandesi (su otto), e un altro milione e mezzo emigrò.[16]

Boole aveva poco e niente da dire su tutto questo, mentre lo indignava moltissimo la crudeltà verso gli animali. In effetti aveva un atteggiamento abbastanza equivoco verso il popolo irlandese; lo vediamo da questi versi di una poesia all'Irlanda che scrisse proprio mentre l'Università di Cork veniva inaugurata:

> Giovane tu in *sapienza*, benché vecchia
> in lacrime e dolori. Che gli amari
> pensieri tuoi, nutriti del passato,
> ti sian dal petto cancellati e spenti.[17]

Benché Cork non fosse di certo un grande centro culturale, il nuovo incarico permise a Boole di vivere in modo molto più consono al rango di uno dei più grandi matematici del secolo. Il padre era morto da poco, e alla madre aveva provveduto adeguatamente. Finalmente il peso della famiglia non gravava più su di lui, ed egli era libero di vivere la sua vita. La matematica che si insegnava al college era di livello piuttosto modesto per un'università: il programma cominciava con «frazioni e numeri decimali» e proseguiva con argomenti che oggi si insegnano nella scuola secondaria. Lo stipendio annuo era di duecentocinquanta sterline, più un onorario di circa due sterline al trimestre che gli veniva pagato direttamente da ogni singolo studente. Boole non aveva assistenti, e lui stesso correggeva settimanalmente le prove scritte.

I Queen's Colleges continuavano a essere motivo di conflitti. Sebbene il rettore di Cork, l'illustre scienziato Sir Robert Kane, fosse cattolico, i cattolici erano sicuramente sottorappresentati: su ventun membri del corpo accademico ve n'era solo uno, a parte Kane. La gerarchia della Chiesa cattolica era arrivata al punto di proibire ai membri del clero di partecipare ai lavori dell'università. Vi era il sospetto che gli aspiranti irlandesi a un incarico fossero discriminati per favorire inglesi e scozzesi, magari mediocri; e il rettore Kane non era molto ben visto. La moglie non gradiva vivere a Cork, e così Kane tentava di dirigere il college da Dublino, il che – unito ai suoi modi duri e dispotici – lo portava a continui scontri col corpo accademico. Erano battaglie sterili, nelle quali di solito restava coinvolto anche Boole.[18]

Diversi anni dopo Mary Everest, che sarebbe diventata sua moglie, descrisse l'atteggiamento della gente di Cork verso il suo futuro marito. Alla domanda: «Che tipo è il professore di matematica?», una signora rispose: «Oh! È un uomo al quale affidereste vostra figlia a occhi chiusi». Un'altra le spiegò che i propri figli non erano in casa perché lui li aveva portati a fare una passeggiata e lei ne era felicissima. Ma quando Mary osservò che il professore era amato da tutti la donna fece marcia indietro: «Non è uno dei miei beniamini ... quanto meno, non trovo piacevole la sua compagnia. Non ci tengo a stare con queste persone buonissime ... non dà mai l'impressione di considerarti cattiva, ma quando sei vicino a uno così puro e santo non puoi fare a meno di pensare quanto dev'essere scioccante la tua presenza. Mi fa sentire una strega. Ma quando i ragazzi stanno con lui sono tranquilla; so che è un bene per loro».[19]

Mary era figlia dell'eccentrico reverendo Thomas Roupell Everest, fratello del tenente colonnello George Everest, l'uomo che avrebbe dato il suo nome alla montagna più alta del mondo; lo zio materno John Ryall, vicerettore del Cork College e professore di greco, era amico di George Boole. Fu lui a farli conoscere. Da bambina Mary aveva mostrato una certa attitudine per la matematica, e quando George cominciò a darle lezioni private divennero buoni amici e presero a scriversi spesso. Probabilmente lui pensava che i diciassette anni di differenza fossero troppi per un rapporto più stretto, ma cinque anni dopo che si erano conosciuti la morte del padre di lei segnò una svolta nei loro rapporti.

Mary era caduta in miseria; George le propose di sposarla, e prima della fine dell'anno divennero marito a moglie.

Il matrimonio durò appena nove anni, perché George morì all'età di quarantanove anni. Aveva fatto cinque chilometri a piedi in una giornata d'ottobre fredda e piovosa per andare a lezione; gli venne una bronchite che si trasformò rapidamente in polmonite, e due settimane dopo se ne andò. La cosa tragica è che forse la sua morte fu affrettata dalle balorde teorie mediche della moglie, che a quanto pare lo curava facendolo coricare tra lenzuola inzuppate nell'acqua fredda.[20]

Il loro era stato sicuramente un matrimonio felice;[21] per Mary era «come il ricordo di un sogno solare». La vedova Boole visse abbastanza a lungo nel ventesimo secolo e morì a ottantaquattro anni mentre dall'altra parte della Manica infuriava la prima guerra mondiale; aveva abbracciato una serie di idee mistiche e scritto parecchie sciocchezze. Le loro cinque figlie – dall'unione erano nate solo femmine – ebbero una vita interessante. La terzogenita, Alicia, aveva un notevole talento geometrico, riuscendo persino a visualizzare con chiarezza oggetti nello spazio a quattro dimensioni, e fece varie scoperte matematiche importanti. Ma la storia più straordinaria fu quella della più giovane, Ethel Lilian, che aveva solo sei mesi quando il padre morì e ricordava la propria infanzia come un periodo di tremenda povertà. Lily – come veniva chiamata – frequentava l'ambiente degli emigrati rivoluzionari russi che a fine Ottocento avevano scelto Londra come propria residenza. Fu proprio per aiutare i suoi amici rivoluzionari che visitò l'impero russo, che allora comprendeva gran parte della Polonia. A Varsavia, mentre guardava la fortezza della Cittadella fu vista, dalla cella in cui era rinchiuso, dal suo futuro marito Wilfred Voynich. Qualche anno dopo Voynich, fuggito a Londra, la riconobbe: fu l'inizio romantico di una storia che culminò nel matrimonio.

In seguito Lily diventò famosa come autrice di un romanzo, *The Gadfly* [Il tafano], ispirato alla sua breve ma appassionata storia d'amore con un agente segreto, conosciuto come Sidney Reilly, la cui vita rocambolesca ha dato spunto alla miniserie televisiva *Reilly: Ace of Spies*. Ironia della sorte, Reilly, acceso anticomunista, fu giustiziato in Unione Sovietica dai bolscevichi mentre il romanzo della sua amante – la cui vera fonte d'ispirazione era sconosciuta ai sovietici – divenne una lettura obbligatoria nelle scuole russe. Nel 1955 la «Pravda» rivelò ai moscoviti che l'autrice del romanzo era viva e in buona salute a New York, e Lily ricevette dalla Russia quindicimila dollari di diritti d'autore. Morì nel 1960, a novantasei anni.[22]

L'ALGEBRA DELLA LOGICA DI GEORGE BOOLE

Torniamo adesso alla nuova algebra applicata da Boole alla logica. Sappiamo già che se x e y rappresentano due classi, xy denota la classe delle cose che appartengono tanto a x quanto a y, e che nelle intenzioni di Boole questa notazione doveva suggerire un'analogia con la moltiplicazione dell'algebra ordinaria; nella terminologia oggi in uso xy è detta *intersezione* di x e y.[23] Abbiamo anche visto che, quando x rappresenta una classe, l'equazione $xx = x$ è sempre vera. Ciò indusse Boole a chiedersi: *nell'algebra ordinaria, dove x sta per un numero, quand'è che l'equazione $xx = x$ è vera?* La risposta è immediata: l'equazione è vera quando x è uguale a 0 o a 1, e in nessun altro caso. Fu così che Boole arrivò al principio che l'algebra della logica è esattamente ciò che sarebbe l'algebra ordinaria se fosse limitata a due soli valori, 0 e 1; solo che per dare un senso a questa conclusione era necessario reinterpretare i simboli 0 e 1 come classi. Per capire in che modo, vediamo come si comportano i numeri 0 e 1 rispetto alla moltiplicazione ordinaria: 0 *per un numero qualsiasi dà* 0, 1 *per un numero qualsiasi dà quello stesso numero*; in simboli,

$$0x = 0, \quad 1x = x$$

Passando alle classi, $0x$ sarà identica a 0 per ogni x *se interpretiamo* 0 *come una classe alla quale non appartiene nulla*, ovvero, detto in termini moderni, come la *classe vuota*. $1x$ sarà invece identica a x per ogni x *se* 1 *contiene tutti gli oggetti che si considerano*, ovvero, potremmo anche dire, se è l'universo del discorso.

L'algebra ordinaria non si occupa solo di moltiplicazione, ma anche di addizione e sottrazione. Perciò Boole, se voleva presentare l'algebra della logica come nient'altro che l'algebra ordinaria più la regola speciale $xx = x$, doveva trovare un'interpretazione per + e −. E così stabilì che, se x e y stavano per classi, $x + y$ stesse per la classe di tutte le cose presenti o in x o in y (oggi chiamiamo questa classe *unione* di x e y). Per usare il medesimo esempio di Boole, se x è la classe degli uomini e y la classe delle donne, $x + y$ è la classe formata da tutti gli esseri umani. Boole scriveva inoltre $x - y$ per la classe degli oggetti che sono in x ma non in y;[24] se x rappresenta la classe di tutti gli esseri umani e y quella di tutti i bambini, $x - y$ rappresenta la classe degli adulti. In particolare, $1 - x$ rappresenta la classe di tutte le cose che non sono in x, per cui

$$x + (1 - x) = 1$$

Vediamo ora come funziona quest'algebra. Sostituiamo, usando la notazione algebrica ordinaria, x^2 a xx; potremo allora scrivere la regola fondamentale di Boole nelle due forme $x^2 = x$, o $x - x^2 = 0$. Dalla seconda di queste equazioni otteniamo, raccogliendo a fattor comune come nell'algebra ordinaria,

$$x(1-x)=0$$

che espressa a parole diventa: «*Niente può tanto appartenere quanto non appartenere a una classe x*». Per Boole fu un risultato entusiasmante, che rafforzò la sua convinzione di essere sulla strada giusta; infatti questa equazione, come egli stesso disse citando la *Metafisica* di Aristotele, esprimeva proprio «... quel "principio di contraddizione" che Aristotele ha descritto come l'assioma fondamentale di tutta la filosofia: "È impossibile che la stessa qualità appartenga e non appartenga alla stessa cosa ... Questo è il più certo di tutti i principî ... Per questa ragione tutti coloro che eseguono qualche dimostrazione si riferiscono ad esso come a una conoscenza fondamentale. Esso è infatti, per natura, la fonte di tutti gli altri assiomi».[25]

Boole dovette provare una gioia immensa quando ottenne quella conferma di cui tutti gli scienziati che introducono idee nuove e generali vanno in cerca: vedere un principio importante e già conosciuto – in questo caso, quello aristotelico di non contraddizione – trasformarsi in un semplice caso particolare di una di queste idee. A quei tempi, in effetti, chi scriveva di logica equiparava il più delle volte la logica ai risultati ottenuti da Aristotele molti secoli prima; e questo significava sostenere, per usare le sue stesse parole, che «la scienza della logica gode di un'immunità da quelle condizioni d'imperfezione e progresso cui sono soggette le altre scienze».

La parte della logica studiata da Aristotele si occupa di inferenze, i cosiddetti *sillogismi*, di un tipo molto particolare e limitato, che da una coppia di proposizioni dette *premesse* deducono un'altra proposizione detta *conclusione*. Premesse e conclusioni devono poter essere espresse da enunciati di uno di questi quattro tipi:

Tipo di enunciato	Esempio
Tutti gli X sono Y	Tutti i cavalli sono animali
Nessun X è un Y	Nessun albero è un animale
Alcuni X sono Y	Alcuni cavalli sono purosangue
Alcuni X non sono Y	Alcuni cavalli non sono purosangue

Ed ecco un esempio di sillogismo valido:

Tutti gli X sono Y
Tutti gli Y sono Z

Tutti gli X sono Z

Dire che questo sillogismo è *valido* significa che, sostituendo a X, Y e Z proprietà qualsiasi, se le due premesse sono vere sarà vera anche la conclusione. Ecco due esempi di sostituzione:

Tutti i cavalli sono mammiferi	Tutte le arpie sono demoni
Tutti i mammiferi sono vertebrati	Tutti i demoni sono scarlatti
Tutti i cavalli sono vertebrati	Tutte le arpie sono scarlatte

Usando i metodi algebrici di Boole si dimostra facilmente che questo sillogismo è valido. Dire che tutto ciò che è in X appartiene anche a Y è come dire che non c'è niente che appartenga a X ma non a Y, cioè $X(1-Y)=0$ o, equivalentemente, $X=XY$; e possiamo scrivere, analogamente, $Y=YZ$. Usando queste equazioni otteniamo

$$X = XY = X(YZ) = (XY)Z = XZ$$

cioè la conclusione desiderata.[26]

Naturalmente, non tutti i sillogismi sono validi. Possiamo ottenere un esempio di *sillogismo non valido* scambiando la seconda premessa e la conclusione nell'esempio precedente:

Tutti gli X sono Y
Tutti gli X sono Z

Tutti gli Y sono Z

Stavolta non c'è modo di usare le premesse $X=XY$ e $X=XZ$ per ottenere la presunta conclusione $Y=YZ$.

Retrospettivamente è difficile capire come mai tanti pensassero che il ragionamento sillogistico esaurisse l'intera logica, e Boole criticò questa idea con parole veramente sferzanti, sottolineando che gran parte del ragionamento ordinario richiedeva quelle che egli chiamava *proposizioni secondarie*, cioè proposizioni esprimenti relazioni fra altre proposizioni, e un ragionamento di questo tipo non è sillogistico.

Come esempio (molto semplice) di ragionamento non sillogistico, ascoltiamo questa conversazione fra Joe, che non trova il libretto degli assegni, e Susan, che cerca di aiutarlo:

SUSAN L'hai lasciato al supermercato quando sei andato a fare la spesa?

JOE No, ho telefonato e non l'hanno trovato. Se l'avessi lasciato lì l'avrebbero trovato di sicuro.

SUSAN Aspetta un momento! Ieri sera hai staccato un assegno al ristorante, e poi ti ho visto rimettere il libretto nella tasca della giacca. Se dopo non l'hai più usato dev'essere ancora lì.

JOE Hai ragione, non l'ho più usato. È nella tasca della giacca.

Joe fruga un poco e – se è una buona giornata per la logica – il libretto che non si trovava è proprio lì. Ma ora vediamo come si può usare l'algebra di Boole per analizzare il ragionamento suo e di Susan.

I due hanno utilizzato queste proposizioni (alle quali metterò come etichette altrettante lettere dell'alfabeto):

L = Joe ha *lasciato* il libretto degli assegni al supermercato

T = Il libretto degli assegni di Joe è stato *trovato* al supermercato

S = Joe ha *staccato* un assegno ieri sera al ristorante

G = Ieri sera, dopo avere staccato l'assegno, Joe si è messo il libretto nella tasca della *giacca*

N = Joe *non* ha più usato il libretto degli assegni da ieri sera

A = Il libretto degli assegni di Joe è *ancora* nella tasca della sua giacca

Inoltre hanno usato il seguente schema:

PREMESSE
Se *L*, allora *T*
Non *T*
S & *G*
Se *S* & *G* & *N*, allora A
N

CONCLUSIONI
Non *L*
A

Questo schema costituisce un'inferenza valida, come i sillogismi di Aristotele, e, come in tutte le inferenze valide, la verità di certi enunciati detti *conclusioni* discende dalla verità di altri enunciati detti *premesse*.

Boole si accorse che la stessa algebra che funzionava per le classi avrebbe funzionato anche con inferenze di questo tipo.[27] Usando un'equazione della forma $X=1$ per dire che la proposizione X era vera e, analogamente, una della forma $X=0$ per dire che era falsa, si poteva scrivere $X=0$ invece di «Non X». Era anche possibile scrivere $XY=1$ invece di «X & Y»; infatti X & Y è vera se e solo se X e Y sono entrambe vere, e algebricamente $XY=1$ se $X=Y=1$, ma $XY=0$ se X o Y è uguale a 0 (o lo sono entrambe).

Infine, l'asserzione «Se X, allora Y» può essere rappresentata dall'equazione

$$X(1-Y)=0 \qquad (*)$$

Per capire come mai, pensiamo «Se X, allora Y» come l'asserzione che

se $X=1$, *allora* $Y=1$

Se nell'equazione (*) sostituiamo X con 1, otteniamo $1(1-Y)=0$, cioè $1-Y=0$, vale a dire $Y=1$.

Se usiamo queste idee possiamo esprimere le premesse di Joe e Susan mediante le equazioni

$$\begin{aligned} L(1-T)&=0 \\ T&=0 \\ SG&=0 \\ SGN(1-A)&=0 \\ N&=1 \end{aligned}$$

Sostituendo (in virtù della seconda equazione) T con 0 nella prima equazione otteniamo la prima conclusione che volevamo, $L=0$. Sostituendo (per la terza e la quinta equazione) SG con 1 e N con 1 nella quarta equazione, otteniamo $1-A=0$ cioè $A=1$, la seconda conclusione che volevamo.

Naturalmente Joe e Susan non avevano nessun bisogno di quest'algebra, ma il fatto che il sistema di Boole riuscisse a catturare il tipo di ragionamento che ha luogo, in modo informale e implicito, nelle normali interazioni umane accese la speranza di catturare anche ragionamenti più complicati. Ora, la matematica può essere vista come un concentrato sistematico di inferenze logiche altamente complesse, per cui il criterio ultimo di validità, per una logica che miri alla completezza, è la capacità o meno di abbracciare tutti i ragionamenti matematici. Ma ritorneremo sull'argomento nel prossimo capitolo.

Come ultimo esempio dei metodi di Boole consideriamo ora la prova dell'esistenza di Dio dovuta a Samuel Clarke cui ho accennato all'inizio del capitolo. Anche se non tenteremo di seguire la lunga e complessa deduzione di Clarke è interessante, quanto meno, vedere come procede Boole. Cito un breve frammento:[28]

«Le premesse sono:

«*a*) Qualcosa esiste.

«*b*) Se qualcosa esiste, allora, o qualcosa è sempre esistito oppure le cose che esistono ora sono sorte dal nulla.

«*c*) Se qualcosa esiste, allora, o esiste per necessità della sua propria natura, oppure per volontà di un altro essere.

«*d*) Se esiste per necessità della sua propria natura, allora qualcosa è sempre esistito.

«*e*) Se esiste per volontà di un altro essere, allora l'ipotesi che le cose che esistono siano sorte dal nulla è falsa.

«Ora dobbiamo esprimere in simboli questa proposizione.

«Poniamo

«x = Qualcosa esiste.

«y = Qualcosa è sempre esistito.

«z = Le cose che esistono ora sono sorte dal nulla.

«p = (Il qualcosa di cui si è parlato sopra) esiste per necessità della sua propria natura.

«q = (Questo qualcosa) esiste per volontà di un altro essere».

A questo punto Boole ottiene dalle premesse le seguenti equazioni:

$$1 - x = 0$$
$$x\left\{yz + (1-y)(1-z)\right\} = 0$$
$$x\left\{pq + (1-p)(1-q)\right\} = 0$$
$$p(1-y) = 0$$
$$qz = 0$$

C'è da chiedersi come avrebbe accolto Clarke questa riduzione del suo intricato ragionamento metafisico a manipolazioni di equazioni così semplici. Probabilmente, essendo un discepolo di Newton, l'avrebbe vista con piacere; invece ne sarebbe rimasto inorridito Sir William Hamilton, il combattivo metafisico che tanto odiava la matematica.

BOOLE E IL SOGNO DI LEIBNIZ

Il sistema logico di Boole non solo comprendeva quello di Aristotele, ma andava molto più in là; ciò nonostante, rimaneva parecchio al di qua di ciò che sarebbe stato indispensabile per realizzare il sogno di Leibniz. Consideriamo l'enunciato «Tutti gli studenti bocciati sono stupidi o pigri»: qualcuno potrebbe considerarlo del tipo

Tutti gli X sono Y

solo che in questo caso la classe degli studenti stupidi o pigri dovrebbe essere trattata come un'unità e non sarebbe permesso nessun ragionamento che cercasse di distinguere i bocciati per stupidità dai bocciati per pigrizia. Nel prossimo capitolo vedremo che il sistema logico di Gottlob Frege copre invece anche questo tipo più sottile di ragionamento.

È del tutto naturale usare l'algebra di Boole come sistema di regole di calcolo; possiamo dunque dire che nei suoi limiti essa fornì quel *calculus ratiocinator* che Leibniz aveva vagheggiato. Ma gli scritti in cui Leibniz aveva affrontato l'argomento erano soprattutto lettere, o comunque manoscritti inediti, e solo nel tardo Ottocento venne avviato un lavoro serio di ricerca e pubblicazione di questo materiale, per cui non è verosimile che Boole abbia avuto modo di conoscere le fatiche del suo predecessore. Tuttavia il paragone tra il suo sistema, ben sviluppato, e i tentativi sparsi di Leibniz è interessante. Il frammento leibniziano citato nel primo capitolo aveva come secondo assioma $A \oplus A = A$; dunque considerava un'operazione che ubbidiva alla regola fondamentale di Boole $xx = x$. Ma Leibniz si proponeva anche di costruire una logica che fosse un sistema deduttivo definito in tutti i dettagli, in cui ogni regola doveva essere ricavata da un piccolo numero di assiomi, in pieno accordo con la prassi dei nostri giorni; dunque da questo punto di vista era più avanti di Boole.

La grande conquista di George Boole consistette nel dimostrare, una volta per tutte, che la deduzione logica poteva essere trattata come un ramo della matematica. Sebbene dopo l'opera da pioniere di Aristotele vi fossero stati alcuni progressi (grazie soprattutto agli stoici nell'età ellenistica e agli scolastici del dodicesimo secolo), Boole, sostanzialmente, aveva trovato la logica come lui l'aveva lasciata due millenni prima. Ma dopo Boole questa disciplina non ha più smesso di crescere.[29]

III
FREGE: DALLA GRANDE CONQUISTA AL CROLLO

Nel giugno del 1902 arrivò a Jena (una città medioevale che molti anni dopo sarebbe diventata parte della DDR) una lettera spedita al cinquantatreenne Gottlob Frege dal giovane filosofo inglese Bertrand Russell. Frege era convinto di avere fatto scoperte importanti, fondamentali, ma la sua opera era quasi del tutto ignorata, per cui dovette fargli piacere leggere: «Sono d'accordo con lei su tutte le cose essenziali ... Trovo nei suoi lavori analisi, distinzioni e definizioni che invano si cercherebbero nell'opera degli altri logici». Ma la lettera proseguiva dicendo: «[illegible] un solo punto nel quale ho incontrato una difficoltà». Frege capì immediatamente che quella «difficoltà» isolata significava il crollo del lavoro di tutta la sua vita; né gli era di molto conforto che Russell aggiungesse: «La trattazione rigorosa della logica nelle questioni fondamentali ... è rimasta molto indietro; nella sua opera ho trovato la migliore elaborazione del nostro tempo, e mi sono permesso quindi di esprimerle il mio profondo rispetto».

Frege rispose subito a Russell, riconoscendo l'esistenza del problema. Il secondo volume del trattato nel quale applicava i suoi metodi logici alla fondazione dell'aritmetica era già in tipografia, ed egli vi aggiunse in tutta fretta un'appendice che cominciava con queste parole: «Per uno scienziato non c'è niente di peggio che veder crollare i fondamenti del suo lavoro proprio quando questo è stato appena completato. Io sono stato messo in tale situazione da una lettera del signor Bertrand Russell».

Molti anni dopo – ne erano passati oltre quaranta dalla morte di Frege – lo stesso Russell ebbe occasione di scrivere: «Quando penso ad atti d'integrità e magnanimità, mi rendo conto che fra tutti quelli che conosco non c'è niente che regga il confronto con la dedizione di Frege alla verità. L'opera della sua vita era sul punto di essere completata, gran parte di essa era stata ignorata a tutto vantaggio di uomini infinitamente meno capaci, il secondo volume stava per essere pubblicato, e quando egli scoprì che il suo assunto fondamentale era errato la lieta e serena dirittura intellettuale con cui reagì prevalse chiaramente su ogni sentimento personale di delusione. Fu una cosa quasi sovrumana, una dimostrazione significativa di ciò di cui sono capaci gli esseri umani se è al lavoro creativo e alla conoscenza che si dedicano, e non all'impresa – tanto più grossolana – di emergere e farsi conoscere».[1]

Il filosofo contemporaneo Michael Dummett, la cui opera è in buona parte ispirata alle idee di Frege, scrive sull'«integrità» di quest'ultimo in tono ben diverso: «Per me c'è una certa ironia nel fatto che l'uomo alle cui opinioni filosofiche ho dedicato, anno dopo anno, lunghe riflessioni fosse, almeno nell'ultima parte della sua vita, un razzista virulento, e più specificamente un antisemita ... Il [suo] diario ci mostra un Frege di estrema destra, ferocemente avverso al sistema parlamentare, ai democratici, ai liberali, ai cattolici, ai francesi e soprattutto agli ebrei, che secondo lui avrebbero dovuto essere privati dei diritti politici, e preferibilmente espulsi dalla Germania. [Quando lo lessi] ne fui profondamente scosso perché veneravo Frege, nel quale vedevo un uomo assolutamente razionale».[7]

I contributi di Frege hanno avuto, effettivamente, importanza enorme. Fu lui a darci il primo sistema logico pienamente sviluppato e capace di abbracciare tutti i ragionamenti deduttivi della matematica ordinaria, e il suo pionieristico uso degli strumenti dell'analisi logica per lo studio del linguaggio è alla base di importanti dottrine filosofiche. Oggi, in ogni biblioteca universitaria, sotto la voce «Frege, Gottlob», si trovano ben più di cinquanta pubblicazioni; eppure quest'uomo quando morì era pieno di amarezza, convinto che il lavoro di tutta la sua vita non avesse prodotto niente di valido, e la sua morte fu ignorata dalla comunità degli studiosi. D'altronde ancor oggi sappiamo pochissimo della sua vita privata.[8]

Gottlob Frege nacque l'8 novembre 1848 a Wismar, una piccola città della Germania orientale. Il padre era teologo (di fede evangelica) e preside di un liceo femminile nel quale lavorava anche la madre. A trentotto anni Frege sposò la trentacinquenne Margarete Lieseberg, che morì diciassette anni dopo senza avergli dato figli; nel 1908 adottò un bambino di cinque anni, Alfred: sarà lui a riportare alla luce quell'infame diario del 1924 (scritto dunque da Frege un anno prima della morte). Alfred Frege, che durante la guerra era militare in un'unità di stanza a Parigi, fu ucciso in battaglia poco più di una settimana dopo lo sbarco alleato in Normandia, due mesi esatti prima della liberazione della capitale francese. Fu lui a battere a macchina il diario manoscritto del padre e a spedirlo al Frege Archiv (di cui era curatore Heinrich Scholz); ciò accadeva nel 1938, cinque anni dopo la presa del potere da parte di Hitler. All'epoca quei sentimenti che tanto avrebbero indignato Michael Dummett sembravano normalissimi in Germania. Sia il manoscritto originale sia la biografia di Frege scritta da Alfred sono andati perduti.

Frege si iscrisse all'università all'età di ventun anni. Dopo un biennio a Jena passò a Göttingen, dove nel giro di tre anni conseguì il dottorato in matematica; ottenne quindi un incarico, non remunerato, come *Privatdozent* all'Università di Jena: all'epoca si faceva ancora mantenere dalla madre, che, rimasta vedova, era subentrata al marito come preside del liceo femminile. Cinque anni dopo ebbe un posto di professore associato a Jena dove rimase fino al 1918, quando andò in pensione. Non fu mai promosso ordinario: i colleghi non apprezzavano il suo lavoro.

Nel 1873 la Germania, da poco unificata, era in preda all'euforia: la guerra contro la Francia di Napoleone III era terminata con una grande vittoria, e l'industria si stava espandendo impetuosamente. Fino alla morte dell'imperatore Guglielmo I, il cancelliere Bismarck continuò abilmente la sua politica di alleanze per garantire la sicurezza del Paese. Lui e l'imperatore furono gli eroi di Frege per tutta la sua vita. Bismarck era un perfetto reazionario, e diede all'imperatore il totale controllo degli affari militari e della politica estera; esecrava la democrazia, e fece votare leggi che proibivano molte delle attività del partito socialdemocratico.

Ma Guglielmo II, poco dopo essere salito al trono, si sbarazzò del vecchio cancelliere. Uomo vanitoso e insicuro, il nuovo imperatore avviò una politica estera disastrosa, e con le sue iniziative, non ben valutate nelle loro conseguenze, riuscì ad allarmare le altre potenze europee, al punto che Francia, Russia e Inghilterra strinsero un'alleanza contro la Germania. Dinnanzi al pericolo di una guerra su due fronti – contro la Russia a est e contro la Francia a

Gottlob Frege (Institut für Matematische Logik und Grundlagenforschung, Westfälische Wilhelm-Universität Münster) ovest – lo stato maggiore tedesco mise a punto il piano Schlieffen, brillante ma in ultima analisi catastrofico, che mirava a sconfiggere rapidamente i francesi prima che la lenta macchina bellica russa fosse pronta a entrare in azione.[4]

Nell'estate del 1914, in risposta all'assassinio a Sarajevo dell'arciduca Ferdinando, l'Austria, spalleggiata dai tedeschi, dichiarò guerra alla Serbia: era l'inizio della prima guerra mondiale. La Russia, per sottolineare la propria determinazione a non permettere che gli austriaci sterminassero i fratelli slavi, cominciò a mobilitare l'esercito. Al che i generali tedeschi spinsero presso l'imperatore per attuare immediatamente il piano Schlieffen, che prevedeva un attacco tedesco attraverso il Belgio. Ne derivò una violazione della neutralità belga che trascinò nella catastrofe bellica – le cui conseguenze hanno segnato tutto il ventesimo secolo – anche l'Inghilterra. In guerra è raro che le cose vadano secondo le intenzioni dei comandi militari: il piano Schlieffen fallì e i combattimenti degenerarono in uno stallo sanguinoso che massacrò il meglio di una generazione di europei in una guerra di trincea. Molti accademici tedeschi, come se non avessero capito che al fronte le cose andavano male, proponevano una pace che avrebbe permesso alla Germania di annettersi vasti territori, compreso l'intero Belgio.

Poiché la vittoria continuava a sfuggire ai tedeschi e il blocco inglese esigeva un pesante tributo, il comando delle forze armate fu affidato al generale Ludendorff, un giocatore imprevedibile (qualche anno dopo avrebbe preso parte al «putsch della birreria» di Hitler), il quale rifiutò ogni trattativa di pace finché un'avanzata britannica nei Balcani minacciò di aggirare i tedeschi su un fianco. Ludendorff, vistosi di fronte alla sconfitta, disse all'imperatore che non c'era altra via che l'armistizio, e fu così che finirono sia la guerra sia la monarchia.

Nella neonata repubblica tedesca salirono al governo i socialdemocratici, e molti, Frege compreso, finirono col dar credito alla diceria di una Germania costretta a entrare in guerra contro la sua volontà, e di un esercito mai sconfitto sul campo di battaglia e pugnalato alle spalle dall'opposizione interna di socialisti ed ebrei. In definitiva, fu questa atmosfera avvelenata a rendere possibile l'ascesa di Hitler al potere.

Nel 1923 l'inflazione postbellica azzerò il valore dei risparmi e verosimilmente anche della pensione di Frege che, ridotto in miseria, fu costretto a coabitare con dei parenti a Bad Kleinen fino all'anno della morte (1925). Fu in queste circostanze che scrisse il famigerato diario. Sognava un capo che facesse risorgere la Germania dall'infima condizione in cui era stata gettata; aveva sperato ardentemente che potesse essere Ludendorff, e restò assai deluso nell'apprendere della sua partecipazione al fallito putsch hitleriano. Sperava ancora in von Hindenburg, ma temeva che fosse troppo vecchio; e comunque non visse abbastanza per vederlo consegnare le chiavi della repubblica a Adolf Hitler.

Nel diario, sotto la data 22 aprile 1924, Frege parla del trattamento (secondo lui meritato) riservato un tempo agli ebrei della sua città natale, e trova anche modo di esternare le sue opinioni sui francesi e la loro perniciosa influenza:

«All'epoca c'era una legge che consentiva agli ebrei di passare la notte a Wismar solo durante certe fiere annuali ... Suppongo che questo decreto fosse molto antico. I wismaresi dei tempi andati dovevano avere avuto con gli ebrei esperienze che li avevano indotti a fare questa legge.

«Doveva essere stato il modo ebraico di fare affari e insieme il loro carattere nazionale, che è strettamente legato a questo modo di fare affari ... E arrivò il suffragio universale, anche per gli ebrei. Venne la libertà di movimento, anche per gli ebrei; regali della Francia. Noi permettiamo così facilmente ai francesi di colmarci di regali! Se solo ci fossimo rivolti ai nobili e patriottici tedeschi ... In realtà i francesi ci avevano trattato in maniera odiosa già prima del 1813, e noi abbiamo questa ammirazione cieca per tutto ciò che viene dalla Francia ... Solo in questi ultimi anni ho veramente imparato a comprendere l'antisemitismo. Se vogliamo fare delle leggi contro gli ebrei, dobbiamo riuscire a trovare un tratto che li distingua e grazie al quale li possiamo riconoscere con certezza. Per me questo è sempre stato un problema».[5]

Il problema, per Frege puramente teorico, di individuare gli ebrei in modo abbastanza preciso da poter emanare delle leggi contro di loro divenne assolutamente pratico sotto il nazismo. In base al codice razziale nazista, anche Ludwig Wittgenstein, ammiratore e seguace di Frege e ritenuto uno dei massimi pensatori del Novecento, sarebbe stato considerato ebreo.

In altre pagine del diario Frege inveisce contro socialdemocratici e cattolici:

«Nel 1914 il Reich soffriva di un cancro, la socialdemocrazia (24 aprile).

«Certo, io già consideravo l'Oltremontanismo e la sua incarnazione, il partito di centro, gravemente nocivi per il Reich e la nazione; tuttavia le rivelazioni di ... Ludendorff nel suo [recente] articolo sui tentativi e le macchinazioni degli oltremontani mi hanno fatto capire cose che mi turbano profondamente.[6] Io prego tutti coloro che ancora non credono nello spirito profondamente antitedesco del partito di centro di meditare sul predetto articolo di Sua Eccellenza Ludendorff ... Si tratta del peggior nemico che abbia mai operato contro il Reich di Bismarck ... [Gli oltremontani] guarderanno sempre al papa per ricevere ordini (26 aprile)».[7]

Idee di estrema destra come quelle di Frege non erano affatto rare in Germania dopo la prima guerra mondiale. Certo, ci si può chiedere se queste non siano altro che le rimuginazioni di un uomo anziano, amareggiato – e forse mentalmente confuso –, che di lì a un anno sarebbe morto; purtroppo ci sono ben pochi dubbi sul fatto che già da tempo le sue idee fossero reazionarie. Durante la guerra il suo collega Bruno Bauch, professore di filosofia a Jena, aveva fondato una società filosofica di destra, la Deutsche Philosophische Gesellschaft, che pubblicava una rivista (da lui diretta) sulla quale scriveva anche Frege, uno dei primi ad aderire alla DPG. Nei suoi scritti sul concetto di nazione Bauch batteva molto sull'idea che nessun ebreo poteva essere un vero tedesco; e nel 1933, quando i nazisti presero il potere, il suo gruppo li appoggiò senza riserve.[8]

L'«IDEOGRAFIA» DI FREGE

È con sollievo che si passa dalle sconfortanti riflessioni di un Frege ormai prossimo alla fine alle brillanti conquiste intellettuali della sua giovinezza. Nel 1879 uscì l'*Ideografia* (nell'originale tedesco, *Begriffsschrift*, termine non facilmente traducibile costruito da Frege a partire da *Begriff*, «concetto», e *Schrift*, più o meno «scrittura», «modo di scrivere»), un libretto di neppure cento pagine con il sottotitolo *Linguaggio in formule del pensiero puro modellato su quello dell'aritmetica*,[9] del quale si è detto che è «forse l'opera più importante che sia mai stata scritta in logica».[10]

Frege era alla ricerca di un sistema logico che comprendesse tutte le inferenze deduttive utilizzate nella pratica matematica. Boole aveva preso come punto di partenza l'algebra ordinaria, usando i simboli algebrici per rappresentare le relazioni logiche; Frege, che voleva ricostruire tanto l'algebra quanto le altre parti della matematica come sovrastrutture di cui la sua logica fosse fondamento, considerava invece essenziale introdurre simboli speciali per tali relazioni, così da evitare ogni possibile confusione. Inoltre, mentre per Boole le correlazioni fra proposizioni potevano essere espresse a loro volta da proposizioni («secondarie»), Frege comprese che queste correlazioni potevano essere usate anche per analizzare la struttura di una *singola* proposizione, e ne fece il fondamento della sua logica. Oggi questa intuizione, veramente cruciale, è universalmente accettata ed è alla base della logica moderna.

Frege per esempio analizza l'enunciato

Tutti i cavalli sono mammiferi

usando la relazione logica *se... allora...*:

Se x è un cavallo, *allora x* è un mammifero

L'enunciato

Alcuni cavalli sono purosangue

viene analizzato, analogamente, usando la relazione logica ... *e*...:

x è un cavallo *e x* è un purosangue

Tuttavia la lettera *x* è usata in modo diverso nei due esempi. Nel primo, quello che vogliamo dire è che la cosa asserita è vera *quale che sia x*, ovvero *per ogni x*; nel secondo vogliamo asserirla solo *per qualche x*. Nel simbolismo corrente *per ogni* si scrive $\forall$, e *per qualche* si scrive $\exists$, per cui i due enunciati possono essere scritti così:

$$(\forall x)(\textit{se } x \text{ è un cavallo, } \textit{allora } x \text{ è un mammifero})$$
$$(\exists x)(x \text{ è un cavallo } e\, x \text{ è un purosangue})$$

La A capovolta del simbolo $\forall$ suggerisce la parola «tutti» (*all*) ed è detta *quantificatore universale*; analogamente, la E girata all'indietro del simbolo $\exists$, detta *quantificatore esistenziale*, vuole suggerire la parola «esiste» – tant'è vero che potremmo anche leggere il secondo enunciato così:

Esiste un x tale che x è un cavallo e x è un purosangue

Per la relazione *se... allora...* si usa in genere il simbolo $\supset$; per la relazione ... *e*... il simbolo $\wedge$. In questo modo i due enunciati diventano[11]

$$(\forall x)\ (x \text{ è un cavallo} \supset x \text{ è un mammifero})$$
$$(\exists x)\ (x \text{ è un cavallo} \wedge x \text{ è un purosangue})$$

che possiamo abbreviare così,

$$(\forall x)\ (\text{cavallo}\,(x) \supset \text{mammifero}\,(x))$$
$$(\exists x)\ (\text{cavallo}\,(x) \wedge \text{purosangue}\,(x))$$

o, ancora più stenograficamente,

$$(\forall x)(c(x) \supset m(x))$$
$$(\exists x)(c(x) \wedge p(x))$$

Nel capitolo precedente ho fatto l'esempio del tentativo di Joe e Susan di usare la logica per rintracciare il portafoglio di Joe. Avevo usato alcune lettere per abbreviare gli enunciati, così:

L = Joe ha *lasciato* il libretto degli assegni al supermercato

T = Il libretto degli assegni di Joe è stato *trovato* al supermercato

S = Joe ha *staccato* un assegno ieri sera al ristorante

G = Ieri sera, staccato l'assegno, Joe si è messo il libretto nella tasca della *giacca*

N = Joe *non* ha più usato il libretto degli assegni da ieri sera

A = Il libretto degli assegni di Joe è *ancora* nella tasca della sua giacca

Il ragionamento di Joe e Susan era riconducibile a questo schema:

PREMESSE

Se L, allora T
Non T
S & G
Se S & G & N, allora A
N

CONCLUSIONI

Non L
A

Se usiamo il simbolo ¬ al posto di «non» e gli altri simboli che abbiamo appena introdotto, lo schema in questione diventa

$$\begin{array}{c} L \supset T \\ \neg T \\ S \wedge G \\ S \wedge G \wedge N \supset A \\ N \\ \hline \neg L \\ A \end{array}$$

Qui bisogna ricordare anche un ultimo simbolo: ∨ che sta per ... *o*... La tabella riportata qui di seguito ricapitola tutti i simboli introdotti finora:

$\neg$	non...
$\vee$	... o...
$\wedge$	... e...
$\supset$	se... allora...
$\forall$	ogni
$\exists$	qualche

Alla fine del capitolo precedente avevo proposto l'enunciato

Tutti gli studenti bocciati sono stupidi o pigri

come esempio di espressione la cui struttura logica sfugge all'analisi di Boole; ma con quella di Frege non ci sono problemi. Se scriviamo

$B(x)$ per x è uno studente *bocciato*
$S(x)$ per x è *stupido*
$P(x)$ per x è *pigro*

possiamo esprimere l'intero enunciato così:

$$(\forall x)\big(B(x) \supset S(x) \vee P(x)\big)$$

Dovrebbe essere ormai chiaro che Frege non stava solo elaborando un trattamento matematico della logica, ma anche creando un nuovo linguaggio. Lo guidava in questa impresa l'idea leibniziana di una lingua universale la cui potenza espressiva derivasse da una scelta oculata dei simboli.[12] Possiamo farci un'idea delle potenzialità del linguaggio fregeano attraverso questi esempi, dove $A(x, y)$ sta per *x ama y*:

Ognuno ama qualcuno	$(\forall x)(\exists y)\, x \text{ ama } y$	$(\forall x)(\exists y)\, A(x,y)$
Qualcuno ama ognuno	$(\exists x)(\forall y)\, x \text{ ama } y$	$(\exists x)(\forall y)\, A(x,y)$
Ognuno è amato da qualcuno	$(\forall y)(\exists x)\, x \text{ ama } y$	$(\forall y)(\exists x)\, A(x,y)$
Qualcuno è amato da ognuno	$(\exists y)(\forall x)\, x \text{ ama } y$	$(\exists y)(\forall x)\, A(x,y)$

Prendiamo adesso un altro esempio:

Ognuno ama un amante

Scriviamo, per cominciare,

$$(\forall x)(\forall y)\left[y \text{ è un amante} \supset A(x,y)\right]$$

Ora, se diamo a «essere amante» il senso di «amare qualcuno» possiamo sostituire *y è un amante* con $(\exists z)\, A(y,z)$, ottenendo come risultato finale

$$(\forall x)(\forall y)\left[(\exists z)\, A(y,z) \supset A(x,y)\right]$$

FREGE INVENTA LA SINTASSI FORMALE

La logica di Boole non era che un nuovo ramo della matematica, da sviluppare usando i normali metodi matematici; solo che questi metodi comprendono, ovviamente, il ragionamento logico, e vi è in qualche modo una circolarità in questo usare la logica per sviluppare la logica stessa. Per Frege la cosa era inaccettabile. Quello che intendeva dimostrare era che *tutta* la matematica poteva essere basata sulla logica, e perché la dimostrazione fosse convincente egli doveva trovare un modo di sviluppare la sua logica senza usare la logica stessa. La sua soluzione consistette nel creare, con la *Begriffsschrift*, un linguaggio artificiale che aveva regole grammaticali – o, come oggi preferiamo dire, sintattiche – di una precisione spietata. In tal modo diventava possibile presentare le inferenze logiche come operazioni puramente meccaniche condotte per mezzo di cosiddette «regole d'inferenza» che riguardavano solo le configurazioni in cui erano disposti i simboli. Fu così che nacque, fra l'altro, il primo esempio di linguaggio formale artificiale dotato di una sintassi precisa; da questo punto di vista la *Begriffsschrift* fu l'antenata di tutti i linguaggi di programmazione comunemente usati al giorno d'oggi.

La più fondamentale delle regole d'inferenza di Frege funziona così: posto che ◇ e △ siano due qualsiasi enunciati della *Begriffsschrift*, se sono asseriti sia ◇ sia (◇ ⊃ △) ci è permesso asserire anche △. La cosa importante da notare in questa operazione è che per eseguirla non è affatto indispensabile capire il significato di ⊃. Naturalmente la regola non può dar luogo a errori perché permette solo di passare da ◇ e (*se* ◇, *allora* △) a △; ma per applicarla nella pratica è necessario e sufficiente far corrispondere, uno a uno, i singoli simboli che formano l'enunciato ◇ con quelli della prima parte dell'enunciato più lungo ◇ ⊃ △.[13] Così, nell'esempio del portafoglio di Joe avevamo la premessa

$$S \wedge G \wedge N \supset A$$

Se fossimo in grado di asserire anche $S \wedge G \wedge N$, la regola ci permetterebbe di asserire anche una delle conclusioni desiderate, A. Il gioco a incastro funzionerebbe così:

$$S \wedge G \wedge N \supset A$$
$$S \wedge G \wedge N$$

La logica di Frege è la logica che si insegna agli studenti dei primi anni di matematica, informatica e filosofia;[14] essa è stata alla base di un'enorme mole di ricerche e indirettamente ha condotto Alan Turing all'idea di un calcolatore generale (*all-purpose*). Ma stiamo correndo troppo.[15]

La logica di Frege realizzò un progresso immenso su quella di Boole. Per la prima volta un sistema logico-matematico rigoroso abbracciava, almeno in linea di principio, tutti i ragionamenti normalmente usati dai matematici. Tuttavia il raggiungimento di un simile obiettivo comportava una rinuncia. Partendo da talune premesse della logica di Frege, era possibile applicare le regole da lui stabilite per tentare di giungere a una determinata conclusione; ma se il tentativo falliva, non vi era modo di sapere se ciò era dovuto alla nostra scarsa intelligenza o costanza, oppure se dalle premesse iniziali, semplicemente, *non* poteva discendere quella conclusione. La logica di Frege, insomma, non realizzava il sogno che Leibniz esprimeva dicendo: «Calcoliamo!», e cioè che conoscendo le leggi della logica si possa determinare infallibilmente se una certa conclusione segue o non segue da certe premesse.

PERCHÉ LA LETTERA DI BERTRAND RUSSELL FU COSÌ DEVASTANTE

Se la logica di Frege fu una conquista così grande, perché la lettera di Russell gettò il suo creatore nella disperazione? Per lui la logica era solo il primo passo di un lavoro che doveva rifondare tutta l'aritmetica. Il calcolo differenziale e integrale di Newton e Leibniz era stato straordinariamente fecondo di risultati, ma comportava alcuni passaggi – di uso comune, d'altronde, fra i matematici – molto difficili da giustificare. Nel corso dell'Ottocento questi problemi erano stati a poco a poco superati grazie – in ultima analisi – alla creazione di una teoria nuova e profonda dei sistemi numerici della matematica, il cui fondamento ultimo veniva individuato nei cosiddetti numeri naturali

1, 2, 3, ...

Ora, Frege desiderava costruire una teoria puramente logica dei numeri naturali; ciò gli avrebbe permesso di dimostrare che l'aritmetica e anzi tutta la matematica, compresi gli sviluppi derivanti dal calcolo differenziale e integrale, poteva essere considerata un ramo della logica. Anche Bertrand Russell condivideva questo punto di vista, che avrebbe preso il nome di *logicismo* (il logico americano Alonzo Church lo definisce così: la posizione che assimila la relazione tra logica e matematica a quella tra la parte elementare e la parte avanzata di una stessa disciplina).[16]

Dunque Frege voleva arrivare a definire i numeri naturali in termini puramente logici per poi derivare le loro proprietà utilizzando proprio la sua logica. Così, doveva diventare un concetto logico, per esempio, il numero 3. Come ci si poteva arrivare? Un numero naturale è una proprietà di un insieme, e per l'esattezza il numero dei suoi elementi; dunque il numero 3 è una cosa che hanno in comune collezioni come l'insieme dei cavalli che tirano una troika, l'insieme delle foglie di un trifoglio (nei casi normali), l'insieme $\{a, b, c\}$ delle lettere a, b, c. Si può dire che due qualsiasi di questi insiemi hanno lo *stesso* numero di elementi senza mai parlare del 3: basta metterli in corrispondenza elemento per elemento. Ebbene, Frege ebbe l'idea di identificare il numero 3 con la collezione di tutti questi insiemi, ovvero con l'insieme delle triple. Possiamo, più in generale, *definire* il numero degli elementi di un insieme dato come la collezione di tutti gli insiemi che possono essergli associati biunivocamente.[17]

Nei due volumi del suo trattato sui fondamenti dell'aritmetica Frege spiegava come costruire l'aritmetica dei numeri naturali usando la logica messa a punto nella *Ideografia*, ma la lettera di Russell del 1902 gli mostrò che l'intera costruzione era incoerente, cioè autocontraddittoria. Più esattamente, l'aritmetica ricostruita da Frege utilizzava insiemi di insiemi, e nella lettera Russell dimostrava che ragionando su insiemi di insiemi è facile cadere in contraddizione. Possiamo spiegare il paradosso di Russell così: chiamiamo *straordinario* un insieme se è elemento di se stesso e *ordinario* se non lo è. Come è possibile che un insieme sia straordinario? Prendiamo [adattandolo all'italiano] l'esempio dello stesso Russell: *l'insieme di tutte le cose definibili con meno di 19 parole.* Poiché l'abbiamo appena definito usando solo 12 parole, questo insieme appartiene a se stesso ed è quindi straordinario. Altro esempio: l'insieme di tutte le cose che non sono passeri. Quale che sia questo insieme, sicuramente non è un passero; dunque è anch'esso straordinario.

Russell richiama l'attenzione di Frege sull'insieme $\mathcal{E}$, di tutti gli insiemi ordinari. $\mathcal{E}$ è ordinario o straordinario? Deve essere o l'uno o l'altro, e però non può essere né l'uno né l'altro. È possibile che sia ordinario? Ammettiamolo; in tal caso appartiene a se stesso, essendo la classe di tutti gli insiemi ordinari – ma allora è straordinario.

Bene. Dunque $\mathcal{E}$ deve essere straordinario e perciò, essendo l'insieme degli insiemi ordinari, non appartiene a se stesso; solo che questo lo rende ordinario. Arriviamo così a una contraddizione in entrambi i casi.

Il paradosso di Russell è primo cugino di numerosi rompicapo con cui ci si può soltanto divertire, ma Frege non si divertì affatto, perché si rese subito conto che si poteva facilmente derivare quello stesso tipo di contraddizione anche nel sistema da lui usato per ricostruire l'aritmetica. Ora, se una dimostrazione matematica incorre in contraddizione, almeno una delle premesse da cui parte è falsa. Questo è un principio estremamente utile, che viene usato di continuo come metodo di prova: per dimostrare una proposizione basta far vedere che negandola si cade in contraddizione. Ma la contraddizione in cui era caduto il povero Frege provava che erano insostenibili le stesse premesse su cui era fondato il suo sistema, ed egli non si riprese mai da questo colpo.[18]

FREGE E LA FILOSOFIA DEL LINGUAGGIO

Nel 1892 Frege pubblicò su una rivista filosofica un articolo intitolato *Über Sinn und Bedeutung* (*Senso e denotazione*),[19] e se oggi i filosofi sono tanto interessati alla sua opera lo si deve, oltre che alla logica da lui creata, anche alle questioni sollevate in questo lavoro.

Frege osserva che per nominare, o denotare, lo stesso oggetto si possono usare parole differenti, che tuttavia possono avere sensi o significati assai diversi. Il suo esempio più noto utilizza le espressioni «stella della sera» e «stella del mattino», che hanno un *senso* ben diverso (una è l'astro, molto luminoso, che si vede dopo il tramonto, l'altra è l'astro che si vede prima dell'alba) ma *denotano* entrambe lo stesso pianeta, Venere. E non è affatto ovvio che le due espressioni si riferiscano allo stesso oggetto, tant'è vero che questa, a suo tempo, fu una vera e propria scoperta astronomica.

Il sistema di Frege comprende anche la sostitutività. Consideriamo l'enunciato

Venere è la stella del mattino

Questo enunciato è diversissimo da

Venere è Venere

benché un enunciato sia stato derivato dall'altro sostituendo un'espressione con un'altra che denotava lo stesso oggetto.

Queste idee costituiscono l'inizio di uno dei più importanti capitoli del pensiero del Novecento, la filosofia del linguaggio;[20] ma anche alcuni concetti chiave dell'attuale informatica hanno la loro origine prima in questo saggio.[21]

FREGE E IL SOGNO DI LEIBNIZ

Frege era convinto che la sua *Begriffsschrift* fosse la realizzazione del linguaggio logico universale invocato da Leibniz – e in effetti la sua logica è in grado di trattare gli argomenti più disparati –, ma Leibniz ne sarebbe stato probabilmente deluso, poiché restava al di qua delle sue aspirazioni per almeno due aspetti. Egli aveva immaginato, infatti, un linguaggio non solo utilizzabile per trarre deduzioni, ma in grado anche di inglobare in maniera automatica tutte le verità della scienza e della filosofia. Queste ingenue aspettative erano concepibili solo prima dei giganteschi progressi delle scienze realizzati nel Settecento e nell'Ottocento e basati tanto sulla riflessione teorica quanto su accurate sperimentazioni.

Dal punto di vista della nostra storia, tuttavia, è più utile sottolineare un'altra limitazione della logica di Frege. Leibniz aveva sognato un linguaggio che fosse anche uno strumento di calcolo efficiente, che permettesse di eseguire in modo sistematico inferenze logiche manipolando soltanto dei simboli; nel sistema di Frege, invece, tutte le deduzioni, a parte le più elementari, sono insopportabilmente complesse. E non solo le deduzioni sono lunghe e tediose, ma le regole di Frege non forniscono alcun procedimento di calcolo che permetta di stabilire se una certa conclusione che c'interessa sia o non sia derivabile da determinate premesse nella logica della *Begriffsschrift*.

Poiché, tuttavia, la *Begriffsschrift* riassumeva tutta la logica usata nella matematica ordinaria, divenne possibile studiare l'attività matematica usando i suoi stessi metodi; e queste ricerche produssero, come vedremo, alcuni risultati imprevisti e molto notevoli. La ricerca di un metodo di calcolo in grado di stabilire se una determinata inferenza della logica fregeana era corretta toccò il punto culminante nel 1936, quando si dimostrò che non esiste nessun metodo generale di questo tipo: una pessima notizia per il sogno di Leibniz. Tuttavia fu proprio dimostrando questo risultato negativo che Alan Turing scoprì una cosa che avrebbe riempito Leibniz di gioia: che in linea di principio si sarebbe potuta costruire un'unica macchina universale capace di eseguire ogni possibile calcolo da sola.

IV
CANTOR: UNA DEVIAZIONE ATTRAVERSO L'INFINITO

La successione 1, 2, 3, ... dei cosiddetti numeri naturali, quelli usati per contare, non s'interrompe mai; per grande che sia un numero, possiamo sempre ottenerne uno più grande con l'addizione di 1. In effetti, è possibile concepire i numeri naturali come un insieme generato da un processo che, partendo da 1, ogni volta somma 1 al numero precedente:

$$1, 1+1=2, 2+1=3, \ldots, 99+1=100, \ldots$$

Un tale processo, che prosegue oltre ogni limite finito, era detto da Aristotele «infinito in potenza». Il suo culmine e completamento – l'insieme infinito di tutti i numeri naturali – non era invece da lui accettato: era un infinito «concluso» o «attuale», un concetto di cui negava ogni legittimità.[1] Il punto di vista aristotelico ebbe una forte influenza sui filosofi scolastici del Medioevo cristiano e in particolare su Tommaso d'Aquino; d'altronde la natura dell'infinito ha sempre dato da pensare tanto ai matematici quanto ai filosofi e ai teologi. Questi ultimi potevano teorizzare che l'infinito attuale fosse un aspetto di Dio e che quindi dovesse rimanere un mistero per gli esseri umani, ma Leibniz non si fece fermare da queste considerazioni, tanto che scrisse: «Io sono a tal punto a favore dell'infinito attuale che anziché ammettere che la natura l'aborrisca, come comunemente si dice, ritengo che essa vi faccia ricorso spesso e ovunque, onde mostrare più efficacemente le perfezioni del suo Autore».[2]

I passaggi al limite del calcolo infinitesimale, che tanta importanza acquistarono nella matematica del Sette-Ottocento, esemplificavano l'infinito potenziale. A questo proposito il grande matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ammoniva: «Soprattutto io protesto contro l'uso di una quantità infinita come quantità *completa*, che in matematica non è mai lecito. L'infinito è solo un modo di parlare col quale, propriamente, discorriamo di limiti».[3]

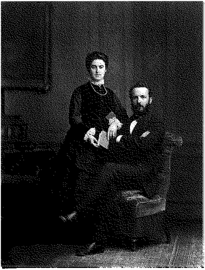
Nella seconda metà dell'Ottocento era ormai chiaro che per formulare con precisione certi problemi matematici che nascevano, in modo del tutto naturale, dagli interessi scientifici dell'epoca occorrevano gli infiniti in atto. Ma tra quanti ebbero a che fare con tali questioni il solo Georg Cantor, incurante del monito di Gauss, accettò la sfida e creò una teoria matematica profonda e coerente dell'infinito attuale. La sua opera scatenò una tempesta di critiche, e non solo i matematici, ma anche i filosofi e i teologi stigmatizzarono la temerarietà di chi mirava a estendere i metodi delle scienze matematiche al dominio, fino ad allora sacro e inviolabile, dell'infinito. Dal canto suo Frege appoggiava la scelta di Cantor di allargare il dominio della matematica fino a includere l'infinito in atto, di cui riconosceva l'importanza per i futuri sviluppi della disciplina, ma al tempo stesso vedeva bene che tra i fautori e i detrattori della visione cantoriana sarebbe stata una lotta senza quartiere: «Alla fine, infatti, l'infinito rifiuterà di lasciarsi escludere dall'aritmetica ... Possiamo dunque prevedere che questo problema costituirà lo scenario di una battaglia grandiosa e decisiva».[4]

Ciò che Frege non poteva prevedere mentre scriveva queste parole era che la sua stessa fondazione dell'aritmetica sarebbe stata una delle prime vittime di tale battaglia; vittima, per l'esattezza, del paradosso sul quale Bertrand Russell – che l'aveva scoperto esplorando le conseguenze dell'infinito cantoriano – avrebbe richiamato la sua attenzione dieci anni dopo. E sicuramente non avrebbe mai potuto immaginare che un giorno tutte quelle tumultuose discussioni, ricerche e dispute sull'infinito attuale avrebbero prodotto intuizioni decisive, destinate a sfociare nella creazione di calcolatori digitali generali.

INGEGNERE O MATEMATICO?

Georg Cantor nacque nel 1845 in un luogo alquanto improbabile per un futuro professore di matematica in un'università tedesca: San Pietroburgo, in Russia. La madre, Marie Böhm, veniva da una famiglia di eccellenti musicisti, e tale era lei stessa; il padre, Georg Waldemar Cantor, nato a Copenaghen, era stato portato a San Pietroburgo da piccolo, e lì allevato e educato, a quanto si sa, da missionari evangelici luterani. Anche Marie, battezzata con rito cattolico, si convertì dopo le nozze alla Chiesa evangelica, e in questa fede furono allevati Georg Cantor e i suoi tre fratelli.[5]

Georg Waldemar Cantor ebbe molto successo negli affari: prima fu rappresentante di commercio all'ingrosso e poi divenne agente di cambio, sempre a



Georg Cantor con la moglie Vally (Ivor Grattan-Guinness)

San Pietroburgo. L'autore di una biografia di Cantor, riferendosi alle lettere che il padre gli scriveva quand'era studente, lo descrive come «persona dalle molte sfumature, colta, matura, gentile», e parla di «una spiritualità che non sempre troviamo negli uomini d'affari».[6]

Il grande flagello dell'Ottocento, la tubercolosi, infuriava soprattutto nei quartieri più poveri, ma anche i ricchi non ne erano immuni: il padre di Cantor contrasse la malattia non ancora cinquantenne, e fu costretto a lasciare l'attività e a trasferirsi con la famiglia in Germania quando il figlio aveva appena undici anni. Grazie tuttavia alla cospicua fortuna che aveva accumulato, anche dopo la sua morte, sopravvenuta di lì a sette anni, i quattro figli ebbero garantita una vita dignitosa.

Georg Waldemar avrebbe voluto che il figlio facesse l'ingegnere, ma finì per acconsentire al suo desiderio di studiare matematica. A Berlino il giovane Georg ebbe come maestri matematici del livello di Karl Weierstrass, Ernst Kummer e Leopold Kronecker. Inizialmente si interessò di settori molto tradizionali della disciplina, tanto che all'esordio della sua carriera sarebbe stato difficile immaginare che un giorno avrebbe esteso gli orizzonti del pensiero matematico in una direzione rivoluzionaria, e che uno dei suoi maestri, Kronecker, sarebbe diventato il suo arcinemico e avrebbe attaccato, definendola insensata, l'opera della sua vita.

Halle, dove Cantor ebbe il suo primo incarico universitario e dove rimase poi per tutta la vita, era un centro industriale sul fiume Saale, distante sessanta chilometri da Jena, la città di Frege. Cantor cominciò come *Privatdozent*, cioè professore non retribuito – cosa normalissima in Germania a quei tempi: in quel paese, chiunque volesse tentare una carriera accademica doveva disporre di un'altra fonte di reddito. Il più eminente dei matematici di Halle, Eduard Heine, si avvide delle sue grandi capacità e lo convinse a lavorare su alcuni problemi relativi alle serie infinite; ne abbiamo già incontrato una nel primo capitolo, la ben nota serie di Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Gli «infiniti» che si incontrano in simili serie sono esclusivamente potenziali, proprio come quelli che aveva in mente Gauss, citato sopra: data una serie infinita, si cerca un limite al quale l'espressione *finita* a secondo membro si approssimi sempre più man mano che a essa si aggiungono nuovi termini (in quella di Leibniz il limite è $\pi/4$), e si dice che la serie converge a tale limite. Qui non abbiamo a che fare con un infinito in sé attuale, perché a ogni stadio del processo vengono sommati solo un numero finito di termini.

Naturalmente, nei due secoli trascorsi dai tempi di Leibniz lo studio delle serie infinite era molto progredito. Cantor si occupava di serie *trigonometriche* (così chiamate perché i loro termini sono costruiti mediante due funzioni trigonometriche, seno e coseno); voleva scoprire in quali condizioni due serie distinte convergevano allo stesso limite, e dimostrare come tali condizioni fossero in realtà molto insolite. Ma le sue ricerche lo portarono molto più in là: scoprì che per ottenere i risultati desiderati doveva trattare gli insiemi infiniti come totalità in sé concluse ed eseguire su di essi operazioni assai complesse. Ben presto cominciò a sviluppare come disciplina autonoma la *Mengenlehre*, la teoria degli insiemi.

Posto che abbia senso trattare l'insieme 1, 2, 3, ... di tutti i numeri naturali come esempio di infinito in atto e in sé concluso, ne ha pure chiedersi quanti numeri contiene? Esistono numeri infiniti con i quali si possano contare insiemi infiniti? Leibniz, che non aveva niente da obiettare sull'infinito in atto in quanto tale, affrontò la questione in una lettera al sacerdote, teologo e filosofo cattolico Nicolas Malebranche e giunse alla conclusione che questi numeri infiniti *non esistevano.* Proviamo a spiegare così il suo ragionamento: noi possiamo dire che due insiemi hanno lo stesso numero di elementi anche senza sapere quale sia questo numero, perché ci basta associare a ogni elemento dell'uno uno e un solo elemento dell'altro e viceversa.[8] Se, ad esempio, osserviamo che in un auditorium non ci sono posti vuoti né persone in piedi possiamo concludere, anche senza contare, che il numero dei presenti e quello dei posti a sedere sono uguali: basta associare ogni singolo posto alla persona che l'occupa. Se davvero esistevano cose come i numeri infiniti, rifletteva Leibniz, il principio doveva valere anche per loro; in altre parole, se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra due insiemi infiniti, bisogna poter concludere che tali insiemi hanno lo stesso numero di elementi. Egli si propose allora di applicare tale concetto all'insieme 1, 2, 3, ... dei numeri naturali e a quello 2, 4, 6, ... dei numeri pari. È facile trovare una corrispondenza biunivoca fra queste due molteplicità: basta associare a ogni numero naturale il suo doppio come qui sotto

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots \end{array}$$

È importante osservare che sebbene i due insiemi siano infiniti, questa particolare associazione fra numeri naturali e numeri pari è stata esplicitata in modo completo: al numero naturale 117, per esempio, corrisponde il numero pari 234, al numero naturale 4228 corrisponde il numero pari 8456, e così via. E Leibniz fece il seguente ragionamento: se davvero esistono dei numeri infiniti, l'esistenza di questa corrispondenza ci costringe a concludere che il numero dei numeri naturali è uguale a quello dei numeri pari; ma come è possibile? Tra i numeri naturali vi sono non soltanto i numeri pari ma anche i dispari, che formano a loro volta un insieme infinito, e uno dei princìpi fondamentali della matematica, presente già in Euclide, dice che il tutto è maggiore di ogni sua parte.[9] Il concetto stesso di «numero di tutti i numeri naturali» era incoerente, concludeva Leibniz, né aveva senso parlare del numero di elementi di un insieme infinito. Per usare le sue stesse parole: «A ogni intero corrisponde un numero pari che è il suo doppio; perciò il numero di tutti i numeri non è maggiore di quello dei numeri pari, cioè il tutto non è maggiore della parte».[10]

Cantor non ragionò in modo molto diverso, e si trovò di fronte allo stesso dilemma: *o* non ha senso parlare del *numero* degli elementi di un insieme infinito, *oppure* qualche insieme infinito avrà lo stesso numero di elementi di uno dei suoi sottoinsiemi. Ma mentre Leibniz aveva scelto un corno del dilemma egli scelse quello opposto: creò un concetto di numero applicabile anche agli insiemi infiniti e accettò tranquillamente che un insieme infinito potesse avere lo stesso numero di elementi di una delle sue parti.

Iniziando da dove Leibniz si era fermato, Cantor cominciò a chiedersi quando era possibile mettere in corrispondenza uno a uno due insiemi infiniti distinti; e mentre Leibniz aveva scoperto che era possibile una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e un suo sottoinsieme (quello dei numeri pari), egli prese in esame insiemi che erano, o sembravano, maggiori di quello dei numeri naturali: per esempio l'insieme dei numeri rappresentabili sotto forma di frazioni (positive),[11] come 1/2 o 5/3. Poiché i numeri naturali possono sempre venir rappresentati per mezzo di frazioni con denominatore 1 (come, per esempio, 7/1), il loro insieme può essere considerato un sottoinsieme di quello delle frazioni positive. Ma, riflettendoci sopra, Cantor scoprì di poter costruire una corrispondenza biunivoca fra queste ultime e i numeri naturali. Le frazioni, infatti, possono essere ordinate in successione così

$$\left|\frac{1}{1}\right|\frac{1}{2}\,\frac{2}{1}\left|\frac{1}{3}\,\frac{2}{2}\,\frac{3}{1}\right|\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{2}\,\frac{4}{1}\left|\frac{1}{5}\,\frac{2}{4}\,\frac{3}{3}\,\frac{4}{2}\,\frac{5}{1}\right|\cdots$$

cioè raggruppate per somma di numeratore e denominatore: prima quelle con somma 2 (ce n'è una sola) e poi man mano quelle con somma 3 (che sono due), con somma 4 (che sono tre), con somma 5 (che sono quattro), e così via. A questo punto è facile istituire una corrispondenza biunivoca con i numeri naturali:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{1}{5} & \frac{2}{4} & \frac{3}{3} & \frac{4}{2} & \frac{5}{1} & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \ldots
\end{array}$$

Poiché intuitivamente sembra che le frazioni siano di gran lunga più numerose dei numeri naturali, si potrebbe pensare che ogni insieme infinito possa essere messo in corrispondenza biunivoca con questi ultimi. La grande conquista di Cantor consistette nel dimostrare che non è così. I numeri rappresentabili sotto forma di frazione si chiamano *razionali*; ora, se un numero razionale viene scritto in forma decimale la successione delle cifre prima o poi comincerà a ripetersi. Ecco alcuni esempi:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333333333333333333333333333\ldots$$
$$\frac{1}{4} = 0,2500000000000000000000000000000000\ldots$$
$$\frac{5}{3} = 1,6666666666666666666666666666666666\ldots$$
$$\frac{24}{11} = 2,181818181818181818181818181818\ldots$$
$$\frac{7}{9} = 1,285714285714285714285714285714\ldots$$

I numeri rappresentabili in forma decimale, con o senza ripetizioni cicliche, sono detti *reali*; quelli nella cui scrittura decimale non vi sono mai tali ripetizioni sono detti *irrazionali*. Ecco alcuni esempi di numeri dei quali è stata dimostrata l'irrazionalità:

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095050\ldots$$
$$\sqrt[3]{2} = 1,259921049894873160\ldots$$
$$\pi = 3,141592653589793240\ldots$$
$$2^{\sqrt{2}} = 2,665144142690225190\ldots$$

I numeri come $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{2}$ (come pure i numeri razionali) sono detti numeri algebrici, perché possono essere soluzioni di equazioni algebriche (per esempio $\sqrt{2}$ è una soluzione di $x^2 = 2$, mentre $\sqrt[3]{2}$ lo è di $x^3 = 2$). Si dimostra invece che π e $2^{\sqrt{2}}$ non soddisfano nessuna equazione algebrica; numeri di questo tipo sono detti *trascendenti*.

Dopo avere mostrato che le frazioni potevano essere associate biunivocamente ai numeri naturali, Cantor considerò l'insieme dei numeri algebrici, e non gli fu difficile mettere anche questi in corrispondenza biunivoca con i naturali; e a quel punto, ovviamente, si chiese se la cosa valeva anche per l'insieme di tutti i reali. Possiamo seguire le riflessioni del ventottenne Cantor attraverso alcune lettere da lui scritte nel 1873 a Richard Dedekind, un giovane matematico conosciuto per puro caso l'anno prima, durante una vacanza in Svizzera. In una di queste lettere, Cantor, da poco nominato professore all'Università di Halle, spiegava all'amico che (come già sappiamo) era possibile costruire una corrispondenza biunivoca tra i numeri naturali e il più ampio insieme delle frazioni positive, mostrando che ciò valeva anche per i numeri algebrici. Dopodiché poneva la questione di una possibile corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e quello di tutti i numeri reali. Ma dalla risposta di Dedekind sembra di capire che questi non fosse granché interessato. Una settimana dopo, in una nuova lettera, Cantor riusciva a dimostrare un teorema veramente notevole, e cioè che l'insieme dei numeri reali *non può* essere posto in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri naturali. *Gli insiemi infiniti erano di almeno due grandezze diverse.*

A quanto pare, neppure Cantor era sicuro che il suo risultato meritasse di essere pubblicato, tanto che lo presentò a una rivista solo dietro incoraggiamento del suo vecchio maestro Karl Weierstrass. Le rivoluzionarie implicazioni di quel teorema venivano a malapena accennate nelle quattro pagine dell'articolo, che insisteva soprattutto sul fatto che, come corollario, era stata trovata una nuova dimostrazione dell'esistenza di numeri reali trascendenti. Tale prova si riduceva all'osservazione che, poiché i numeri algebrici possono essere associati biunivocamente ai naturali e i reali no, l'insieme dei numeri reali è diverso da quello dei numeri algebrici. Doveva pertanto esistere un numero reale non algebrico, ossia trascendente.[12]

Nel frattempo, la vita privata di Cantor attraversava un periodo molto felice. Nel 1874 sposava Vally Guttman, intima amica di sua sorella e musicista di talento; ebbero sei figli, e tutte le testimonianze concordano sul fatto che nella famiglia c'erano amore e devozione. Sebbene Cantor avesse fama di uomo duro e spigoloso sul lavoro, a casa era molto gentile: «A tavola se ne stava seduto in silenzio e lasciava che i bambini facessero ogni sorta di domande; poi si alzava e ringraziava la moglie per la sua bravura in cucina con queste parole: "E tu sei contenta di me? E mi ami?"».[13]

Tuttavia, quando Cantor iniziò a dedicare sempre maggiori energie alla teoria degli insiemi, vide crescere l'opposizione alle sue nuove idee (indubbiamente sconvolgenti). Il suo vecchio maestro Kronecker si dimostrò particolarmente accanito nel criticare il significato stesso della sua ricerca, e cercò perfino di impedire la pubblicazione di alcuni suoi lavori. In quella atmosfera, era impossibile che gli venisse offerto un incarico in un'università prestigiosa, dove avrebbe potuto lavorare a contatto con colleghi alla sua altezza. Era destinato a rimanere nella provincialissima Halle, né ebbero successo i suoi tentativi di indurre l'amico Dedekind a raggiungerlo. Nel 1886, rassegnandosi all'inevitabile, acquistò a Halle una splendida casa.

ALLA RICERCA DEI NUMERI INFINITI

Ignorando il monito di Gauss – che le infinità in atto non erano cose che dovessero interessare i matematici –, Cantor si lasciò sedurre dall'infinito, dominio tradizionalmente riservato a teologi e filosofi.

Le sue ricerche matematiche avevano fornito una base per le sue idee rivoluzionarie, ma egli si spinse molto più in là di quanto esse gli imponevano. Nel linguaggio comune i numeri naturali 1, 2, 3, ... vengono usati in due modi diversi, ma correlati: da un lato per contare e dall'altro per ordinare, come mostrano gli enunciati seguenti:

Nella stanza ci sono *quattro* persone.
Il cavallo di Joe è arrivato *quarto*.

Il parlare quotidiano distingue tra numeri *cardinali* e *ordinali*, per i quali usa parole diverse: rispettivamente *uno, due, tre, ...* e *primo, secondo, terzo, ...* Si adoperano i numeri cardinali per indicare quanti oggetti vi sono in un insieme, e gli ordinali per indicare quale posizione gli stessi oggetti occupano in un determinato ordinamento. La scoperta che non esiste una corrispondenza biunivoca tra numeri naturali e numeri reali indusse Cantor a porsi il problema dei cardinali infiniti, e il suo lavoro sulle serie trigonometriche gli suggerì un modo per concettualizzare i numeri ordinali infiniti.

A ogni insieme, finito o infinito – ipotizzava Cantor –, è associato un unico *numero cardinale*: il numero cardinale di un insieme è l'oggetto che si ottiene astraendo dalla natura specifica degli elementi di cui esso si compone, così da restare con pure e semplici unità prive di qualsiasi proprietà. Se due insiemi possono essere associati in maniera biunivoca, avranno lo stesso numero cardinale. Sia ora M un insieme qualsiasi: Cantor introduce il simbolo $\overline{\overline{M}}$ per il numero cardinale di M.[14] Per esempio,[15] se

$$A=\{\clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit\},\ B=\{3,6,7,8\},\ \text{e}\ C=\{6,5\}$$

sarà

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = 4 \text{ e } \overline{\overline{C}} = 2$$

Ovviamente, mettere in corrispondenza biunivoca A con B è molto facile:

$$\begin{array}{cccc} \clubsuit & \diamondsuit & \heartsuit & \spadesuit \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Che accade quando due insiemi non hanno lo stesso numero cardinale? Detto in simboli, il problema riguarda la coppia di insiemi M e N tale che $\overline{\overline{M}} \neq \overline{\overline{N}}$. In tal caso uno dei due numeri cardinali è più grande e l'altro più piccolo; usando i soliti simboli < («è minore di») e > («è maggiore di») possiamo scrivere $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ (o, equivalentemente, $\overline{\overline{N}} > \overline{\overline{M}}$) per indicare che l'insieme con il numero cardinale più grande è N. Ma per dimostrare che le cose stanno effettivamente così dobbiamo poter stabilire una corrispondenza biunivoca tra M *e un qualche sottoinsieme* di N;[16] per esempio, nel caso appena visto, in cui $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{C}}$ (dato che $4 > 2$), il sottoinsieme di $A \{\diamondsuit \heartsuit\}$ può essere associato a C così:

$$\begin{array}{cc} 6 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow \\ \diamondsuit & \heartsuit \end{array}$$

Finché ci limitiamo agli insiemi finiti, tutto questo può sembrare niente più che un modo astruso di dire cose semplici e ben conosciute, e in effetti la potenza delle idee cantoriane ci diventa chiara solo quando le applichiamo a insiemi infiniti. Cantor chiama *transfiniti* i numeri cardinali degli insiemi infiniti; il suo primo esempio di numero transfinito è il cardinale dell'insieme dei numeri naturali, per il quale egli introduce il simbolo $\aleph_0$, che si legge «aleph con zero», ove $\aleph$ è la prima lettera dell'alfabeto ebraico.[17]

Per indicare il numero cardinale dell'insieme dei numeri reali Cantor usava la lettera C (iniziale di *continuo,* come veniva talvolta denominato l'insieme) ed era convinto che si trattasse del numero cardinale transfinito immediatamente successivo a $\aleph_0$. L'asserzione che fra $\aleph_0$ e C non vi sono cardinali transfiniti intermedi è nota appunto come *ipotesi del continuo.* E però Cantor, nonostante anni di tentativi, non riuscì mai a né a dimostrarla né a confutarla, e di ciò non poté darsi pace. Alla luce delle nostre conoscenze, è chiaro che stava battendo la testa contro un muro; infatti i fondamentali risultati di Kurt Gödel nel 1938 e Paul Cohen nel 1963 mostrano che, se mai il dilemma dell'ipotesi del continuo troverà soluzione, ciò non potrà accadere con i metodi della matematica ordinaria. Non sorprende quindi l'incapacità di Cantor di venire a capo della questione; e in effetti, riguardo alla conclusione negativa di Gödel e Cohen, gli specialisti esprimono ancora oggi opinioni diverse sul fatto che essa rappresenti davvero il massimo che ci possiamo aspettare o se nuovi e più potenti metodi permetteranno di ottenere un risultato più soddisfacente.

Nel suo lavoro sulle serie trigonometriche Cantor fu portato a considerare un certo processo che poteva venire ripetuto infinite volte, a stadi successivi – primo stadio, secondo stadio, terzo stadio e così via; ma a fargli fare il gran salto nel transfinito fu la scoperta che, *dopo* queste infinite ripetizioni, c'era ancora qualcosa. Ben presto cominciò a parlare di stadio ω^{mo}, $(\omega+1)^{mo}$, e così via e a elaborare l'aritmetica dei cosiddetti «numeri ordinali transfiniti», come li avrebbe chiamati in seguito. Consideriamo, per cominciare, l'insieme finito $\{\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\}$. I suoi elementi possono essere ordinati in sei modi diversi:

1° 2° 3°	1° 2° 3°	1° 2° 3°	1° 2° 3°	1° 2° 3°	1° 2° 3°
↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓
♣ ◇ ♡	♣ ♡ ◇	◇ ♣ ♡	◇ ♡ ♣	♡ ♣ ◇	♡ ◇ ♣

Questi sei ordinamenti presentano tuttavia lo stesso schema, con un *primo* elemento seguito da un *secondo* seguito a sua volta da un *terzo*. Ciò vale per ogni insieme finito: se l'insieme è composto di n elementi, in qualsiasi ordinamento vi saranno un primo, un secondo, ... un n-esimo elemento. Ora, Cantor si avvide che per gli insiemi infiniti le cose non stanno affatto in questi termini: gli insiemi infiniti, infatti, possono venire ordinati in modi differenti in base a schemi diversissimi. Supponiamo ad esempio che i numeri naturali 1, 2, 3, ... siano disposti in modo che prima vengano tutti i numeri pari e poi tutti i dispari:

2, 4, 6, ... 1, 3, 5, ...

Se cerchiamo di usare i numeri ordinali per indicare le posizioni dei vari elementi di questa progressione, scopriamo che quelli a noi familiari – gli ordinali finiti – vengono esauriti solo per sistemare i numeri pari:

1°	2°	3°	...	?	?	?	...
↓	↓	↓		↓	↓	↓	
2	4	6	...	1	3	5	...

Cantor vide come superare la difficoltà per mezzo dei *numeri ordinali transfiniti*, e postulò che dopo tutti quelli finiti vi fosse, appunto, un primo ordinale transfinito, che indicò con la lettera greca ω, al quale seguivano $\omega+1$, $\omega+2$, ecc. In tal modo diventava molto facile, nell'esempio citato, assegnare le posizioni anche dei numeri dispari:

$$\begin{array}{cccccccc} 1^{\circ} & 2^{\circ} & 3^{\circ} & \ldots & \omega^{mo} & (\omega+1)^{mo} & (\omega+2)^{mo} & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 1 & 3 & 5 & \ldots \end{array}$$

Per questa via Cantor scoprì che era possibile ordinare i numeri naturali in molti modi diversi usando ordinali transfiniti sempre più grandi. Chiamò *prima classe numerica* l'insieme dei numeri (ordinali) finiti, cioè i numeri naturali 1, 2, 3, ..., e *seconda classe numerica* l'insieme degli ordinali transfiniti necessari per ordinare i numeri naturali nei diversi modi possibili. Per indicare il numero cardinale di questa seconda classe numerica utilizzò il simbolo $\aleph_1$. Riuscì anche a dimostrare – e fu un'impresa notevole – che $\aleph_1$ è il numero cardinale immediatamente successivo a $\aleph_0$, il più piccolo cardinale transfinito. In altri termini, $\aleph_1 > \aleph_0$, e non vi è alcun numero cardinale maggiore del secondo e minore del primo.

L'ipotesi del continuo, che Cantor aveva cercato in tutti i modi di dimostrare, dice che C è il numero cardinale immediatamente successivo a $\aleph_0$; poiché egli sapeva che il successore immediato di $\aleph_0$ è in realtà $\aleph_1$, per lui l'ipotesi medesima si riduceva alla domanda molto succinta:

$$C \stackrel{?}{=} \aleph_1$$

Purtroppo, il semplice fatto di essere arrivato a scrivere questa equazione non lo portò più vicino alla dimostrazione della sua verità.

Prima e seconda classe numerica, dunque. Ce n'è una terza? Certamente! Dato che i numeri delle prime due classi non bastavano a ordinare gli insiemi col numero cardinale $\aleph_1$, Cantor introdusse ω_1, il primo numero ordinale transfinito della terza classe numerica, e chiamò $\aleph_2$ il numero cardinale dell'insieme di tutti gli ordinali di questa classe. $\aleph_2$ risultò essere il numero cardinale immediatamente successivo a $\aleph_1$. Cantor comprese che il processo non aveva fine: dopo $\aleph_2$ veniva $\aleph_3$, poi $\aleph_4$, ..., e dopo tutti questi, finalmente, $\aleph_\omega$, e così via.

Cantor stava esplorando un dominio nel quale nessuno si era mai addentrato. Non c'erano regole matematiche su cui basarsi, e dovette inventare tutto da solo, fidando nella propria intuizione. Considerando la natura del terreno in cui si stava avventurando, è veramente notevole che il corpo centrale della sua opera abbia retto così bene. Fin dall'inizio, tuttavia, vi furono coloro che osteggiarono tutta la sua impresa. Ho già parlato dell'ostilità di Kronecker. Stando a una diceria largamente diffusa tra i matematici l'illustre Henri Poincaré avrebbe detto che un giorno la teoria degli insiemi di Cantor «sarà considerata una malattia dalla quale si è guariti». Pare che l'aneddoto sia apocrifo, ma il fatto stesso che circolasse la dice lunga sugli ostacoli che Cantor dovette affrontare.

IL METODO DELLA DIAGONALE

Se a uno studente di oggi si dovesse insegnare uno solo dei risultati di Cantor si tratterebbe quasi sicuramente del metodo della diagonale, presentato in un articolo di appena quattro pagine nel 1891, quando Cantor aveva praticamente smesso di fare ricerca matematica e i suoi decisivi lavori sui numeri transfiniti erano stati stampati e ristampati. La prova che non esiste una corrispondenza biunivoca tra i numeri naturali e i reali, ovvero – per usare il linguaggio che Cantor si sarebbe dato qualche anno dopo – che $\aleph_0 < C$, risaliva al 1874 ed era stata ottenuta con metodi mutuati dalla fondamentale teoria dei passaggi al limite elaborata da Weierstrass. Con il metodo della diagonale si può raggiungere la stessa conclusione a partire da alcuni princìpi logici elementari; di questa tecnica avremo più volte occasione di parlare nella nostra storia.

Per spiegare in che consiste il metodo della diagonale utilizzeremo una metafora. Immaginiamo di avere dei pacchi con tanto di etichetta, ma anche con la particolarità che gli oggetti usati come etichette e quelli contenuti nei pacchi sono dello stesso tipo. Prendiamo ad esempio i quattro semi ♣ ◇ ♡ ♠ di un mazzo di carte e usiamoli come «etichette» di pacchi contenenti questi stessi semi:

♣	◇	♡	♠
↕	↕	↕	↕
{◇ ♡}	{◇ ♠}	{◇ ♡ ♠}	{♣ ◇}

Possiamo presentare queste stesse correlazioni sotto forma di tabella, scrivendo un + per indicare che un seme è contenuto in un pacco e un – per indicare che non lo è:

	♣	◇	♡	♠
♣	⊖	+	+	–
◇	–	⊕	–	+
♡	–	+	⊕	+
♠	+	+	–	⊖

Nella colonna a sinistra della tabella sono riportate le quattro etichette, mentre il contenuto dei rispettivi pacchi è specificato nelle righe orizzontali. I segni + e – posti lungo la *diagonale* sono stati messi in evidenza mediante circoletti. Il metodo della diagonale è una tecnica per raccogliere oggetti dello stesso genere di quelli di partenza in un pacco il cui contenuto sarà diverso da quelli di tutti i pacchi etichettati. Funziona così: costruiamo una nuova tabella mettendo, sotto ogni etichetta, il segno opposto a quello presente sulla diagonale. Così, dato che a ♣ corrisponde, nella diagonale, il segno –, sotto ♣ metteremo il segno +; analogamente, sotto ◇ metteremo il segno –; sotto ♡ il segno –, e infine sotto ♠ il segno +:

	♣	◇	♡	♠
	+	–	–	+

Abbiamo così un nuovo pacco, $\{♣♠\}$. Come facciamo a essere sicuri che sia diverso da tutti quelli etichettati? Non può essere quello con l'etichetta ♣, che *non* contiene ♣ mentre il nuovo pacco *lo contiene*; non può essere quello con l'etichetta ◇, che *contiene* ◇ mentre il nuovo pacco *non* lo contiene, e così via.

Naturalmente i pacchi sono insiemi, e l'etichettatura è un modo di istituire una corrispondenza biunivoca fra insiemi ed elementi. Il metodo è assolutamente generale: non ha importanza che si parta da un insieme M finito o infinito. Se si usa ogni elemento di M per etichettare un qualche insieme particolare composto di elementi di M, sfruttando il metodo della diagonale si potrà ottenere un nuovo insieme di tali elementi diverso da tutti quelli etichettati.

Vediamo un po' come funzionerebbe la cosa con l'insieme dei numeri naturali 1, 2, 3, ... Immaginiamo di distribuire tali numeri in una serie di pacchi; un pacco potrebbe essere formato solo da $\{7, 11, 17\}$ un altro da tutti i numeri pari, e via dicendo. E adesso immaginiamo di usare i numeri naturali stessi come etichette, come in questa disposizione infinitamente lunga:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & \dots \end{array}$$

dove M_1, M_2, M_3, M_4, ... sono altrettanti pacchi di numeri naturali. A questo punto fabbrichiamo un nuovo insieme M, diverso da tutti i precedenti, usando la seguente tabella:

1	– se 1 è in M_1	altrimenti +
2	– se 2 è in M_2	altrimenti +
3	– se 3 è in M_3	altrimenti +
4	– se 4 è in M_4	altrimenti +
...	...	...

In altre parole, 1 appartiene a M se e solo se non appartiene a M_1, 2 appartiene a M se e solo se non appartiene a M_2 e così via, per cui M è un insieme di numeri naturali diverso da M_1, da M_2, ecc. Poiché M_1, M_2, M_3, ... è una qualunque corrispondenza biunivoca tra i numeri 1, 2, 3, ... e gli insiemi di numeri naturali, ne concludiamo che *nessuna di queste corrispondenze può comprendere tutti gli insiemi di numeri naturali*. In altre parole, il numero cardinale dell'insieme di tutti gli insiemi di numeri naturali è maggiore di $\aleph_0$, e anzi si può dimostrare che tale numero non è altro che C, il numero cardinale dell'insieme dei reali.[18] Il metodo della diagonale ci permette dunque di concludere ancora una volta, ma per altra via, che vi sono più numeri reali che numeri naturali.

Questo metodo è talmente generale da fornirci un'altra possibilità (diversa dalla successione degli aleph) di generare una moltitudine di numeri cardinali transfiniti. Supponiamo ad esempio di avere dei pacchi di numeri reali con etichette che sono a loro volta numeri reali: il metodo della diagonale mostra che nessuna etichettatura di questo tipo arriverà mai a comprendere *tutti* gli insiemi di numeri reali, e ciò significa che il numero cardinale dell'insieme di tutti questi insiemi deve essere maggiore di quello dell'insieme dei numeri reali, ossia di C.[19] E si potrebbe continuare. Ma il problema della relazione tra i numeri cardinali generati in questo modo e gli $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... di Cantor resta ancora oggi molto difficile e controverso.

DEPRESSIONE E TRAGEDIA

Fin dall'inizio, Cantor aveva dovuto affrontare un'opposizione che respingeva l'idea stessa che esseri umani finiti potessero anche solo sperare di dire qualcosa di sensato sull'infinito. Ma intorno al volgere del secolo la situazione peggiorò drasticamente, quando si scoprì che ragionamenti fatti senza le dovute cautele intorno ai numeri transfiniti potevano condurre a risultati paradossali o persino ridicoli. I guai ebbero origine dal tentativo di raccogliere in un unico insieme la totalità dei numeri cardinali (o anche degli ordinali) transfiniti. Se esiste l'insieme di tutti i numeri cardinali, qual è il suo numero cardinale? Veniva fuori che doveva essere maggiore di qualsiasi numero cardinale; ma com'era possibile? Come poteva, un numero cardinale, essere più grande di tutti i numeri cardinali?

Cantor si era avveduto da poco di questo sconcertante paradosso quando il matematico italiano Burali-Forti scoprì una difficoltà analoga cercando di lavorare sull'insieme di tutti i numeri ordinali transfiniti: dimostrò cioè che un tale insieme implicava l'esistenza – conclusione chiaramente ridicola – di un ordinale transfinito maggiore di ogni ordinale transfinito. Dopo di che entrò in scena Bertrand Russell, e sferrò un colpo micidiale. Egli partì dalla domanda: *Può esistere l'insieme di tutti gli insiemi?* Se un tale insieme esiste, che cosa accadrebbe applicandogli il metodo della diagonale? In altri termini, che cosa accadrebbe se «impacchettassimo» insiemi arbitrari e poi usassimo ancora insiemi per etichettare i pacchi? Ovviamente, otterremmo un insieme diverso da tutti quelli etichettati. Fu proprio riflettendo su questa situazione che Russell scoprì il suo famoso paradosso dell'insieme di tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi; quello, discusso nel capitolo precedente, che comunicò a Frege, distruggendolo.

Sebbene Russell l'avesse scoperto riflettendo sulle idee di Cantor, di per sé il suo paradosso non aveva nulla a che fare coi numeri transfiniti. A quel punto, anche il ragionamento logico più elementare appariva ai matematici inaffidabile e pieno di trabocchetti; ciò nonostante la maggioranza di loro continuò a lavorare come sempre, tenendosi alla larga da questi problemi; né la cosa sorprende. Quelli che erano interessati al problema della natura ultima della matematica compresero tuttavia che era in atto una vera e propria crisi dei fondamenti della disciplina; e però non tardarono a dividersi in fazioni contrapposte. Secondo alcuni la teoria degli insiemi era parte integrante della matematica e andava preservata a tutti i costi, mentre altri cercavano di impedire che la vera matematica venisse contaminata dal transfinito di Cantor. Nei primi trent'anni del Novecento il lavoro dei logici fu dominato da questi problemi.

Nel 1884 Cantor ebbe il primo di una serie di crolli nervosi – una grave depressione che durò circa due mesi. Dopo essersi ripreso attribuì i suoi problemi mentali al fatto di avere lavorato troppo intensamente sull'ipotesi del continuo e al suo difficile rapporto con Kronecker, al quale scrisse addirittura una lettera proponendogli di rinnovare la vecchia amicizia (e Kronecker rispose cordialmente).

Questa spiegazione dei disturbi di cui soffriva è stata accettata per molto tempo e da molti studiosi, nonostante numerosi episodi facessero pensare (per usare la terminologia contemporanea) a una sindrome maniaco-depressiva. Oggi si pensa che la causa fondamentale del male di Cantor, a prescindere dalla gravità degli eventi esterni, stesse in un cattivo chimismo cerebrale, e che fattori ambientali come le difficoltà con Kronecker e con l'ipotesi del continuo abbiano accelerato ma non determinato il suo disastroso crollo.[30]

L'episodio del 1884 segnò praticamente la fine – se si toglie l'articolo sul metodo della diagonale citato sopra – del pionieristico lavoro di Cantor sulla teoria degli insiemi. Negli intervalli fra le sue gravi crisi mentali egli si occupava sempre più di filosofia e teologia, e soprattutto della questione shakespeariana. Chi aveva scritto le opere attribuite a William Shakespeare? Riguardo all'importanza della sua ricerca e al fatto che vi fossero persone assolutamente decise a stroncarla sviluppò idee che sconfinavano nella paranoia. Poi venne il 1899, un anno di crisi e tragedia, col primo scontro con i paradossi della teoria degli insiemi e con una perdita devastante, la morte di un figlio amatissimo, appena tredicenne.

Occuparsi di un argomento da dilettante non era nello stile di Georg Cantor. Divenne un esperto del periodo elisabettiano e in particolare delle opere teatrali di Shakespeare, e pubblicò diverse monografie in cui cercava di dimostrare che in realtà esse erano state scritte da Francis Bacon – il che, ovviamente, non aveva niente a che fare né con la teoria degli insiemi né col transfinito. Considerava invece strettamente legate al lavoro sull'infinito le sue ricerche filosofiche e teologiche. Era convinto, ad esempio, che al di là del transfinito esistesse un infinito assoluto che il semplice intelletto umano non avrebbe mai potuto comprendere. Anche quei diabolici paradossi che si incontravano nella teoria degli insiemi andavano intesi da questo punto di vista: per esempio la moltitudine dei cardinali transfiniti era da considerare assolutamente infinita, ed era per questo che il pensarla semplicemente transfinita dava luogo a contraddizioni.

UNA BATTAGLIA DECISIVA?

Nel pensiero filosofico tedesco la figura dominante era quella di Immanuel Kant, la cui filosofia critica partiva da due interrogativi cruciali:

> Com'è possibile la matematica pura?
> Com'è possibile la scienza naturale pura?

La risposta di Kant alla prima domanda era basata su quelle che egli chiamava «intuizioni pure» dello spazio (per la geometria) e del tempo (per l'aritmetica), a suo dire del tutto indipendenti dalle sensazioni empiriche.[21] Ma nonostante egli insistesse molto sul valore della scienza, dopo di lui la filosofia tedesca si sviluppò in una direzione diversa, quella di un idealismo assoluto che considerava primari i *concetti* e le *idee* e cercava, praticamente, di intendere il mondo come se fossero state queste le cose di cui era fatto. Uno dei massimi esponenti dell'idealismo era Georg Wilhelm Friedrich Hegel, le cui lezioni erano ascoltate da centinaia di discepoli entusiasti. Hegel ebbe molti seguaci (fra i quali, com'è arcinoto, Karl Marx e Friedrich Engels), e ancor oggi gli studiosi considerano valida gran parte dei suoi scritti; ma egli si mostrò anche capace di ragionamenti contorti che non possono che suscitare ilarità, soprattutto nei due massicci volumi della *Scienza della logica*, in cui chiedeva ai lettori di meditare su questi profondi pensieri:

«*Niente* è semplice uguaglianza con sé.
«L'*essere* è *niente*.
«Il *niente* è *essere*.
«Nella transizione dall'una all'altra queste due categorie si dissolvono in una terza, il *divenire*».

Ma verso la fine dell'Ottocento cominciò a svilupparsi in Germania una nuova filosofia «empirista» che doveva il proprio slancio in parte al «positivismo» di Auguste Comte e in parte alle nuove teorie scientifiche. Secondo gli empiristi gli oggetti primari dai quali deve partire la comprensione del mondo sono i dati sensibili. Cantor considerava questa filosofia una reazione alle insensatezze di Hegel, ma la trovava anche rozza e semplicistica. Uno dei principali esponenti dell'empirismo era l'eminente scienziato Hermann von Helmholtz, fautore di un ritorno a Kant, nel cui pensiero la scienza empirica aveva una posizione centrale; e un opuscolo dello stesso von Helmholtz sul contare e il misurare mandò su tutte le furie Cantor, che in un articolo del 1887 decise di attaccare questo lavoro in quanto espressione di «un punto di vista empirico-psicologico estremo, difeso con un dogmatismo che avrei creduto impossibile». L'attacco proseguiva con queste parole: «Vediamo così che oggi in Germania, per reazione a un ipertrofico idealismo alla Kant-Fichte-Hegel-Schelling, domina saldamente la scena uno *scetticismo accademico-positivistico*. Questo scetticismo si è esteso, inevitabilmente, all'aritmetica, nella quale ha prodotto le conclusioni più sciagurate. In ultima istanza ciò si potrebbe mostrare estremamente nocivo per lo stesso scetticismo positivistico».[22]

Questo articolo venne incluso in una collezione di lavori sul transfinito pubblicata nel 1890, e Frege, che era stato incaricato di recensire il volume, decise di dare rilievo proprio all'affermazione appena citata, scrivendo, in un passo degno di nota (già parzialmente citato all'inizio di questo capitolo) che pubblicò dieci anni esatti prima di ricevere la devastante lettera di Bertrand Russell: «Verissimo! Proprio qui sta lo scoglio sul quale questa filosofia affonderà. In ultima analisi, infatti, il ruolo dell'infinito nell'aritmetica non può essere negato, e tuttavia non può in nessun modo coesistere con una simile tendenza epistemologica. Possiamo dunque prevedere che proprio questo problema sarà teatro di una battaglia grandiosa e decisiva».[25]

Georg Cantor morì quasi improvvisamente per una crisi cardiaca il 6 gennaio 1918, mentre ancora infuriava la prima guerra mondiale. Oggi sappiamo che la battaglia prevista da Frege con la sua metafora militaresca ha prodotto molte sorprese, ma non un esito decisivo; e il più sorprendente dei suoi effetti collaterali è stato forse il modello matematico di un calcolatore generale creato da Alan Turing.

V
HILBERT VOLA AL SOCCORSO

Nel 1737 Giorgio II d'Inghilterra, figlio di Giorgio I, l'ultimo patrono di Leibniz, fondò un'università nella città medieovale di Göttingen sul fiume Leine, nella Germania centrale; un luogo gradevole, nel quale ancora sopravvivono la cinta muraria, diverse chiese gotiche e vecchie strade fiancheggiate da case fatte per metà di legno. L'Università di Göttingen è orgogliosa delle sue splendide tradizioni matematiche, che risalgono all'Ottocento, quando vi insegnavano dei grandi come Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, Lejeune Dirichlet e Felix Klein; ma la vera gloria venne col Novecento, quando gli studenti, attratti soprattutto dalla fama di David Hilbert, arrivavano da ogni dove in quello che rimase il centro indiscusso della matematica mondiale fino al 1933 e all'esodo prodotto dall'ascesa del nazismo al potere.

Nei tardi anni Quaranta, quando ero dottorando, gli studenti si trasmettevano ancora, anno dopo anno, aneddoti dalla Göttingen degli anni Venti – per esempio la saga degli interminabili, crudeli scherzi di Carl Ludwig Siegel ai danni del povero Bessel-Hagen, credulone inguaribile. Ma la mia storia favorita era quella di Hilbert che per giorni e giorni se ne andava in giro con i pantaloni strappati, mettendo molti in imbarazzo. Il suo assistente Richard Courant fu incaricato di fargli presente – con discrezione – l'inopportunità della cosa. Sapendo che gli piaceva molto camminare per la campagna parlando di matematica, lo invitò a fare una passeggiata e prese un sentiero che passava in mezzo ad arbusti spinosi. Fu allora che gli disse che si era strappato i pantaloni su uno di quegli arbusti. «No, sono così da settimane, ma non ci bada nessuno» fu la risposta di Hilbert. In quegli stessi anni Venti Hilbert lanciò una memorabile campagna: usare la matematica per convalidare la matematica stessa. E una strana successione di eventi si snodò da questa campagna hilbertiana fino alle intuizioni di Alan Turing sulla natura del processo di calcolo.

David Hilbert, di famiglia protestante, era nato e cresciuto a Königsberg, nella Prussia orientale, una città che ricordava con orgoglio di essere stata la patria di Immanuel Kant; nel 1870, quando Bismarck orchestrò una guerra contro la Francia di Napoleone III e usò la folgorante vittoria tedesca per realizzare l'unificazione nazionale creando un impero di cui il re di Prussia divenne Kaiser, era un bambino di otto anni. Quando si iscrisse all'Università di Königsberg per studiare matematica era già famoso per il suo talento; già si era formato un'abitudine tutta sua, quella di ragionare sulla matematica anche conversando del più e del meno. Di questo parlava durante le lunghe camminate insieme agli amici Hermann Minkowski e Adolf Hurwitz.[1]

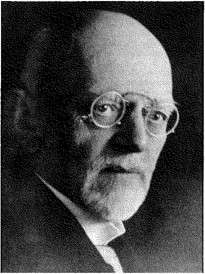
Nei due secoli trascorsi fra l'invenzione del calcolo infinitesimale a opera di Leibniz e Newton e gli anni in cui David Hilbert stava completando la sua formazione di matematico, un piccolo esercito di studiosi aveva scoperto molte applicazioni veramente spettacolari dei passaggi al limite. Spesso questi risultati erano stati ottenuti grazie a manipolazioni puramente formali dei simboli, senza preoccuparsi del loro significato; ma verso la metà dell'Ottocento arrivò la resa dei conti. Stavano nascendo problemi per i quali si richiedeva penetrazione concettuale, e affidarsi ai simboli non bastava più; nel fronte avanzato di questo tipo di ricerca c'erano Georg Cantor, il suo maestro Karl Weierstrass e l'amico Richard Dedekind.

Nel 1888 Hilbert fece un viaggio nei principali centri della matematica tedesca per conoscere direttamente le figure più prestigiose della disciplina, e a Berlino andò a trovare Leopold Kronecker, l'arcinemico di Cantor, che aveva già incontrato due anni prima. Kronecker era un grande matematico, autore di lavori che avrebbero avuto un ruolo fondamentale per le conquiste dello stesso Hilbert; ma Hilbert – come scrisse mezzo secolo dopo, in un necrologio, il suo ex allievo Hermann Weyl – notò che usava «il suo potere e la sua autorità per stendere la matematica sul letto di Procruste di princìpi filosofici arbitrari». Questi princìpi ispiravano a Kronecker un atteggiamento fortemente negativo verso gran parte della matematica di allora. Aveva da ridire non solo sul transfinito di Cantor, ma su tutti gli sforzi di Weierstrass, di Dedekind e dello stesso Cantor di assicurare un fondamento solido e rigoroso ai passaggi al limite del calcolo infinitesimale. Non riconosceva a questi sforzi nessun valore, e soprattutto insisteva perché le dimostrazioni matematiche di esistenza fossero *costruttive*; in altre parole, per essere accettabile una dimostrazione dell'esistenza di oggetti matematici soddisfacenti determinate condizioni doveva anche fornire un metodo per costruire esplicitamente tali oggetti. Di lì a poco Hilbert avrebbe contestato questa tesi nelle sue opere;

e molti anni dopo soleva spiegare la distinzione agli studenti osservando che fra i presenti in aula (nessuno dei quali, evidentemente, era del tutto calvo) ce n'era sicuramente uno che aveva in testa meno capelli di tutti gli altri, e però lui, Hilbert, non conosceva un modo ovvio di individuarlo.[2]

I TRIONFI DEL GIOVANE HILBERT

Il mondo è in divenire, ma certe cose non cambiano. Spesso ai matematici interessa scoprire quali siano esattamente le cose che restano uguali mentre altre si trasformano; ovvero, in linguaggio tecnico, le cose che restano *invarianti* rispetto a certe *trasformazioni*. L'esplorazione di quelli che oggi chiamiamo *invarianti algebrici* venne avviata da Boole in un articolo giovanile;[3] nell'ultimo quarto dell'Ottocento essi erano diventati uno dei principali centri d'interesse della ricerca matematica, tanto che per trovarne qualcuno in più si facevano manipolazioni algebriche di proporzioni epiche. Il matematico tedesco Paul Gordan, soprannominato «re degli invarianti», era un vero virtuoso in questa impresa e, aprendosi un varco fra selve algebriche fittissime, era pervenuto a un teorema che avrebbe semplificato la struttura degli invarianti algebrici. In base alla sua congettura, tra gli invarianti di una data espressione algebrica ve ne sarebbero sempre alcuni, in numero finito, ai quali tutti gli altri sono riconducibili per mezzo di una semplice formula. Tuttavia, Gordan riuscì a dimostrarlo solo in un caso molto particolare. La sua ipotesi era considerata uno dei principali problemi matematici dell'epoca, e si pensava che la sua dimostrazione avrebbe richiesto un'abilità algebrica paragonabile a quella dello stesso Gordan. La dimostrazione che ne diede Hilbert



David Hilbert (foto dell'Autore)

giunse come una specie di bomba, perché non era basata su complicate manipolazioni formali, ma sul potere del pensiero astratto.

Fu dopo avere conosciuto Gordan di persona che Hilbert si scoprì irretito dal problema da lui posto. La sua soluzione, raggiunta dopo sei mesi di lavoro, dipendeva da un risultato estremamente generale, noto oggi col nome di *teorema della base di Hilbert*, la cui dimostrazione era pressoché immediata. Usando questo teorema Hilbert dimostrò che l'ipotesi che la congettura di Gordan fosse falsa generava una contraddizione. Tuttavia la sua spettacolare dimostrazione, non essendo costruttiva, non poteva certo essere soddisfacente per Kronecker: invece di fornire un elenco di quegli invarianti chiave (in numero finito) di cui stabiliva l'esistenza, dimostrava solo che l'ipotesi della loro non-esistenza portava a una contraddizione. Ma dando risalto al potere del pensiero astratto la soluzione di Hilbert spalancava una finestra sulla matematica del nuovo secolo; e l'effetto collaterale della nuova e più generale prospettiva da essa dischiusa fu la morte della teoria classica degli invarianti algebrici. Oggi Gordan è ricordato soprattutto per la sua reazione al teorema di Hilbert: «Questa non è matematica, è teologia!».

La soluzione del problema di Gordan lo fece salire ai vertici della comunità matematica, ma Hilbert non riposò sugli allori. Prima di abbandonare definitivamente gli invarianti, rifinì alcune questioni di dettaglio e soprattutto diede una nuova dimostrazione, stavolta pienamente costruttiva, della congettura di Gordan.[4] A questi risultati aggiunse un vero fuoco di fila di lavori sugli argomenti matematici più diversi; e la cosa curiosa è che uno di tali articoli, molto breve, aveva un inconfondibile profumo cantoriano che Kronecker, sicuramente, avrebbe disprezzato. Nonostante questa prolificità, la sua carriera non faceva passi avanti: per anni rimase *Privat-*

dozent a Königsberg, con le sue magre entrate legate agli onorari delle lezioni. Una volta gli capitò di tenere un intero corso per un solo studente, un matematico di Baltimora, e in una lettera all'amico Minkowski osservò ironicamente che i docenti non remunerati erano undici, e dovevano contendersi altrettanti studenti.

Il 1892 vide alcuni cambiamenti cruciali nella vita del giovane Hilbert. Tutto cominciò con la morte del sessantottenne Kronecker e col pensionamento di Weierstrass; nel mondo chiuso della matematica accademica tedesca si era avviato il disgelo, col disgelo venne un balletto virtuale di cattedre e finalmente Hilbert riuscì a ottenere un posto di ruolo (e uno stipendio regolare). Nello stesso anno sposò la sua partner di ballo favorita, Käthe Jerosch; l'anno dopo nasceva suo figlio Franz. Intanto Felix Klein, gran luminare della facoltà di matematica di Göttingen, aveva deciso di portarvi anche Hilbert, e nella primavera del 1895 le sue manovre andarono in porto: Hilbert si trasferì a Göttingen e vi rimase per il resto della sua vita (morì quarantotto anni dopo, nel 1943).

Se con la sua scintillante dimostrazione della congettura di Gordan aveva chiuso la teoria classica degli invarianti algebrici, con la panoramica generale dello *Zahlbericht* (letteralmente «rapporto sui numeri»), scritto su richiesta della Deutsche Mathematische Gesellschaft, Hilbert aprì una prospettiva matematica immensa e inattesa. I membri della società si aspettavano una relazione sullo stato dell'arte in una disciplina relativamente nuova, la teoria algebrica dei numeri, che molti matematici trovavano abbastanza sconcertante;[5] ricevettero invece una risistemazione critica di tutto il settore a partire dai principi primi. Mezzo secolo dopo, al tempo in cui ero studente, si studiava ancora lo *Zahlbericht* con piacere e profitto.

Hilbert era venuto a Göttingen avendo già pronti dei corsi (quegli stessi che aveva tenuto da *Privatdozent* a Königsberg) su una grande varietà di argomenti. Quarant'anni dopo Otto Blumenthal, il primo dei sessantanove studenti che avrebbero scritto una tesi di dottorato sotto la sua supervisione, ricordava ancora con chiarezza l'impressione che gli aveva fatto appena arrivato a Göttingen: «Uomo di media statura, vivace, con la sua gran barba rossiccia e il modo di vestire molto ordinario non aveva assolutamente un'aria professorale». Blumenthal definisce le lezioni di Hilbert «penetranti, nonostante una certa piattezza nel modo di comunicare e la tendenza a tornare di continuo sulle proposizioni importanti. Tuttavia la ricchezza dei contenuti e la semplicità e chiarezza della presentazione facevano dimenticare la forma. Introduceva concetti nuovi e creati da lui stesso senza dare un particolare risalto alla cosa. Era anche evidente che si preoccupava molto che tutti capissero; faceva lezione per gli allievi, non per se stesso».[6]

Nell'inverno del 1898 gli studenti vennero a sapere che Hilbert intendeva tenere un corso intitolato «Elementi di geometria euclidea» e ne furono molto stupiti; lo credevano totalmente assorbito dalla teoria algebrica dei numeri, e non immaginavano che si interessasse anche di geometria. L'argomento annunciato sembrava davvero strano (dopotutto la geometria euclidea si studiava nelle scuole secondarie), ma lo stupore non fece che aumentare quando il corso iniziò e gli studenti si trovarono davanti un modo totalmente nuovo di *fondare* la geometria. Era il primo segno del profondo interesse di Hilbert per i fondamenti della matematica – l'argomento principale di questo capitolo. Nelle sue lezioni, egli presentava un'assiomatizzazione della geometria che colmava alcune lacune del classico trattamento di Euclide, e sottolineava la natura astratta dell'argomento: si doveva dimostrare con la pura logica che i teoremi seguivano dagli assiomi, senza l'influenza corruttrice di quello che possiamo «vedere» guardando una figura. I teoremi devono rimanere validi – avrebbe detto Hilbert, stando a un famoso aneddoto – anche se parlano non di punti, linee e piani ma di «tavoli, sedie e boccali di birra», sempre che questi oggetti obbediscano agli assiomi.

Hilbert coronò la propria impresa dimostrando che i suoi assiomi erano coerenti, cioè che non se ne poteva ricavare una contraddizione. La dimostrazione rivelava che ogni eventuale contraddizione del suo sistema di assiomi ne avrebbe determinata una anche nell'aritmetica dei numeri reali. Di fatto egli aveva *ridotto* la coerenza della geometria euclidea a quella dell'aritmetica, rimandando a un'altra occasione il problema della coerenza di quest'ultima.

VERSO IL NUOVO SECOLO

Era inevitabile che i matematici presenti al Congresso internazionale di Parigi nell'agosto del 1900 si chiedessero che cosa avesse in serbo per loro il nuovo secolo. In una giornata caldissima e afosa il trentottenne David Hilbert, invitato a tenere una relazione, propose la sfida del Novecento: ventitré problemi che apparivano intrattabili con i metodi esistenti.[7] Con il suo tipico ottimismo Hilbert dichiarò che tutti i matematici avevano in comune la convinzione che «ogni problema matematico ben definito deve necessariamente essere suscettibile di una soluzione esatta ... Questa convinzione ... è un potente sprone per il nostro lavoro. Noi sentiamo interiormente un perpetuo richiamo: *Ecco il problema. Cerca la soluzione. Puoi trovarla con la pura ragione*». Il primissimo problema del suo elenco era quello della verità dell'ipotesi cantoriana del continuo (l'asserzione che non esistono insiemi con un numero cardinale compreso fra quello dell'insieme di tutti i numeri naturali e quello dell'insieme di tutti gli insiemi di numeri naturali). Dunque Hilbert proclamava a gran voce di accettare il transfinito di Cantor proprio mentre la minaccia dei paradossi sembrava riabilitare Kronecker e il suo atteggiamento negativo.

Il secondo problema era proprio quello che la dimostrazione hilbertiana della coerenza degli assiomi euclidei aveva lasciato aperto: dimostrare, in qualche modo, che gli assiomi dell'aritmetica dei numeri reali erano anch'essi coerenti. Fino ad allora le prove di non-contraddittorietà erano sempre state prove di *coerenza relativa*, cioè avevano semplicemente ridotto la coerenza di un certo sistema di assiomi a quella di un altro; ma Hilbert si rese conto che con l'aritmetica si raggiungeva lo strato logico più profondo, il basamento roccioso di tutta la matematica, e a quel punto c'era bisogno di metodi nuovi e diretti. Questo secondo problema gli diede anche occasione di spiegare che cosa intendeva per «esistenza» in matematica. Mentre Kronecker sosteneva che per dimostrare l'esistenza di un oggetto matematico bisognava fornire un metodo per costruirlo o esibirlo, secondo Hilbert bastava mostrare che l'ipotesi dell'esistenza di tale oggetto non produceva contraddizioni: «Se si può dimostrare che gli attributi assegnati a un concetto non porteranno mai a una contraddizione mediante l'applicazione di un numero finito di processi logici, io dico che l'esistenza matematica del concetto ... è con questo dimostrata». Così, secondo Hilbert la contraddizione derivante dall'ipotesi che esista un insieme formato da tutti i numeri cardinali transfiniti di Cantor dimostrava solo che un simile insieme non esiste. Dopo che il paradosso comunicato da Bertrand Russell a Frege nella devastante lettera del 1902 era di-venuto di pubblico dominio, molti cominciarono a vedere la *difficoltà* di fondare la matematica come una *crisi* dei fondamenti. Il problema della coerenza dell'aritmetica era ormai una piaga in suppurazione, ma solo negli anni Venti Hilbert decise di aggredirlo direttamente insieme ai suoi allievi e seguaci – con conseguenze che nessuno di loro era in grado di prevedere.

L'elenco dei problemi proposti da Hilbert nel 1900 ha affascinato generazioni di matematici; esso comprendeva una gran varietà di argomenti di matematica pura e applicata e lasciava presagire l'ampiezza dei futuri contributi dello stesso Hilbert. Nel necrologio in suo onore, Hermann Weyl osservò che chiunque avesse risolto uno dei problemi dell'elenco sarebbe immediatamente entrato «nella classe più onorata della comunità matematica». Nel 1974 l'American Mathematical Society organizzò un simposio tematico (al quale ebbi il privilegio di partecipare) in cui gli oratori erano invitati a parlare degli sviluppi cui questi problemi avevano dato origine; quando furono pubblicati, gli atti del simposio formavano un volume di oltre seicento pagine, e questo dà un'idea di quanto feconda fosse stata la sfida di Hilbert.[8]

IL FANTASMA DI KRONECKER

Le perplessità di molti matematici davanti al transfinito di Cantor, e anzi a tutta la direzione presa dalla ricerca sui fondamenti, giunsero a una svolta quando Bertrand Russell rese nota la contraddizione che aveva scoperto in un ragionamento apparentemente semplice e diretto. Abbiamo già visto che Frege rinunciò all'opera della sua vita quando ricevette la lettera in cui Russell gli comunicava il suo paradosso, e c'è da chiedersi se pensasse alla profezia che aveva fatto dieci anni prima: «In ultima analisi, infatti, il ruolo dell'infinito nell'aritmetica non può essere negato ... Possiamo dunque prevedere che proprio questo problema sarà il campo di una battaglia grandiosa e decisiva».[9]

E sebbene Frege e Dedekind, l'amico di Cantor, avessero abbandonato il campo, non mancavano certo i lottatori desiderosi di entrare nella mischia. Nei primi anni del Novecento, Hilbert e Henri Poincaré, universalmente considerati i più grandi matematici viventi, vi parteciparono con entusiasmo, ma da parti opposte. Il successivo Congresso internazionale dei Matematici ebbe luogo nel 1904, e Russell aveva reso noto il suo paradosso due anni prima. Nella sua relazione Hilbert chiarì quale fosse il suo approccio alla crisi abbozzando le grandi linee di una possibile dimostrazione di non-contraddittorietà dell'aritmetica,[10] non senza aggiungere che tale dimostrazione avrebbe potuto essere estesa anche al transfinito di Cantor. Poincaré osservò immediatamente che il suo ragionamento era circolare, perché i metodi che intendeva giustificare erano esattamente gli stessi usati nella presunta dimostrazione della loro non-contraddittorietà (Hilbert ci mise anni a fare i conti con questa obiezione). Poincaré riconosceva una certa utilità a quello che chiamava «cantorismo», ma sosteneva con fermezza che «*Non esiste un infinito in atto (dato e completo).* I cantoriani l'hanno dimenticato e sono caduti in contraddizione» (corsivo di Poincaré).[11] Qui si coglie un'eco delle parole scritte circa ottant'anni prima da Gauss e citate nel capitolo precedente: «Soprattutto io protesto contro l'uso di una quantità infinita come quantità *completa*, che in matematica non è mai lecito». La grande opera della vita di Cantor era stata un'eroica sfida a questa tradizione.

Bertrand Russell non era tra coloro che avevano abbandonato il campo, e lavorava assiduamente a un sistema di logica simbolica capace di realizzare il programma di Frege di riduzione dell'aritmetica alla logica pura senza incorrere nei paradossi. Lo aiutava molto a spiegare ai contemporanei le sue idee il sistema di simboli introdotto da Giuseppe Peano (sostanzialmente, quello che ho presentato nel capitolo III), molto più comprensibile di quello di Frege. Ma Poincaré attaccò duramente i suoi tentativi: «È difficile capire come la parola "*se*" acquisti, quando è scritta ⊃, una virtù che non possedeva quando era scritta "se"».[12]

Poincaré non mancò di osservare che prendere sul serio gli sforzi di Russell significava ammettere la possibilità di ridurre la matematica a mero calcolo (il sogno di Leibniz!), e non perse l'occasione di mettere l'idea in ridicolo: «Com'è facile capire, per dimostrare un teorema non sarà necessario e nemmeno utile sapere che cosa significa ... possiamo immaginare una macchina nella quale entrerebbero assiomi a un'estremità mentre dall'altra uscirebbero teoremi, un po' come quella leggendaria macchina di Chicago dove i maiali entrano vivi ed escono trasformati in salsicce e prosciutti. Il matematico non ha bisogno di sapere che cosa sta facendo più di quanto ne abbia questa macchina».[13]

Il tentativo di Russell di resuscitare il programma di Frege prese la forma dei tre monumentali volumi dei *Principia Mathematica*, scritti insieme ad Alfred North Whitehead e pubblicati nel 1910-1913. L'opera partiva dalla logica pura dell'*Ideografia* di Frege e terminava con argomenti di natura chiaramente matematica; in mezzo c'erano solo passi semplici e diretti che ricordavano da vicino la «macchina di Chicago» di Poincaré. I paradossi venivano evitati grazie a un'elaborata e pesante stratificazione in cui ogni insieme poteva avere solo elementi appartenenti tutti allo stesso strato, ma questa struttura appesantiva la pratica matematica ordinaria a tal punto che bisognava introdurre un principio ad hoc (e molto dubbio), l'*assioma di riducibilità*, per attraversare le barriere erette fra strato e strato.[14] Inoltre i *Principia* erano inficiati da una mancata distinzione: mentre Frege aveva chiaramente compreso di avere a che fare con due livelli linguistici – quello del nuovo sistema formale da lui costruito e quello del linguaggio ordinario, *nel* quale si poteva parlare *di* questo nuovo linguaggio –, Russell e Whitehead non facevano chiarezza in proposito, anzi i due livelli venivano confusi.[15] Ciò significava che il problema della coerenza dell'intera struttura, così cruciale per Hilbert, in un contesto alla Russell non si poneva nemmeno. Ciò nonostante i *Principia* furono una pietra miliare, perché dimostravano una volta per tutte che la formalizzazione completa della matematica entro un sistema di logica simbolica era perfettamente realizzabile.

Mentre Bertrand Russell si affaticava a costruire una base logica per l'intera matematica classica evitando nello stesso tempo i paradossi, un giovane studioso olandese, L.E.J. Brouwer, era già arrivato alla conclusione che molti aspetti di questa impresa erano inficiati da errori irrimediabili e andavano messi da parte. Nella sua tesi di dottorato del 1907 Brouwer mostrava una tale ostilità verso il transfinito di Cantor e gran parte della pratica matematica dell'epoca da sembrare posseduto dallo spirito di Kronecker. Due anni prima, nel 1905, si era momentaneamente allontanato dagli studi matematici per pubblicare un libricino, intriso di pessimismo romantico, su «vita, arte e misticismo». Dopo avere definito illusione la vita in questo «triste mondo», lo scontroso giovanotto concludeva: «Guardate questo mondo, pieno di poveretti che immaginano di possedere qualcosa ... e ora nutrono un insaziabile appetito di conoscenza, potere, salute, gloria e piacere.

«Solo chi riconosce di non aver nulla e non poter possedere nulla, chi riconosce che la sicurezza è irraggiungibile, chi si rassegna completamente e sacrifica tutto, chi dà tutto, chi nulla sa, nulla vuole e nulla vuole conoscere, chi abbandona e tralascia tutto riceverà tutto: il mondo della libertà si apre davanti a lui, il mondo della contemplazione senza dolore; e del nulla».[16]

Nonostante questo elogio dell'autonegazione Brouwer si impegnò con grande determinazione per ricostruire dalle fondamenta la pratica matematica in un modo che soddisfacesse le sue convinzioni filosofiche. Avrebbe potuto scegliere un argomento del tutto ortodosso per la sua tesi di dottorato, ma era fermamente deciso a lavorare sui fondamenti della matematica.[17] Il relatore acconsentì a malincuore, ma qualche tempo dopo, irritato dall'ostinazione di quell'allievo, peraltro brillante, che insisteva per inserire nella dissertazione idee strane e non pertinenti, gli scrisse: «Mi sono di nuovo chiesto se potevo accettare il secondo capitolo così com'è, ma in tutta onestà non me la sento, Brouwer. Mi sembra tutto intrecciato con una sorta di pessimismo e con un atteggiamento mistico verso la vita che non è matematica e neppure ha a che fare coi fondamenti della matematica».[18]

Per Brouwer, la matematica esiste nella coscienza e deriva in ultima analisi dal tempo come «intuizione matematica primordiale»; la sua realtà sta appunto nell'intuizione del matematico, non nell'espressione linguistica. E non solo la matematica non è logica (come sostenevano invece Frege e Russell), ma la logica deriva dalla matematica. Per Brouwer, la convinzione di Cantor di avere scoperto infiniti di diversa grandezza era insensata, e il problema del continuo una banalità. Quanto a Hilbert, sbagliava ad affermare che per l'esistenza matematica occorreva solo la non-contraddittorietà. Era vero il contrario: «In matematica *esistere* [corsivo di Brouwer] significa essere costruito attraverso l'intuizione, e la questione se un certo linguaggio sia coerente non solo è priva di per sé d'importanza, ma non è nemmeno un criterio di esistenza matematica».[19]

Ma Brouwer non si limitò a riprendere il richiamo di Kronecker alla costruzione come unico metodo valido per stabilire l'esistenza in matematica; andò ancora più in là, negando ogni valore all'applicazione agli insiemi infiniti di un principio logico fondamentale: la legge aristotelica del *terzo escluso*, per il quale ogni proposizione o è vera o è falsa.[20] Per Brouwer, di certe proposizioni non si può dire né che sono vere né che sono false, per esse non si conosce un metodo per decidere in un modo o nell'altro. La prima dimostrazione hilbertiana della congettura di Gordan usava la legge del terzo escluso così come la usano di solito i matematici; Hilbert mostrava che negando la congettura si sarebbe arrivati a una contraddizione. Per Brouwer questo procedimento era inaccettabile.

Ultimata la tesi di dottorato, Brouwer scelse deliberatamente di tenere nascoste per qualche tempo quelle sue idee così controverse e di pensare solo a dimostrare la propria abilità matematica. A tale scopo scelse un settore nuovo e in pieno rigoglio, la topologia, e ottenne diversi risultati molto profondi, compreso l'importante *teorema del punto fisso*.[21] Nel 1910, quando pubblicò questo fondamentale risultato, il ventinovenne Brouwer si era già conquistato l'ammirazione di Hilbert, il quale lo volle, nonostante la giovane età, nel comitato editoriale dei «Mathematische Annalen», la prestigiosa rivista da lui diretta (ma in seguito se ne sarebbe pentito). Dopo avere ottenuto nel 1912 (grazie anche alla raccomandazione di Hilbert) un incarico regolare all'Università di Amsterdam, Brouwer si sentì libero di tornare al suo programma rivoluzionario, che adesso chiamava «intuizionismo».

Hermann Weyl era il miglior allievo di Hilbert e uno dei massimi matematici del secolo; fu lui, quando Hilbert andò in pensione, a essere scelto come suo successore a Göttingen. Era un uomo i cui interessi abbracciavano la matematica, la fisica, la filosofia e perfino l'arte; ma finì per convincersi, con gran dispiacere del maestro, che le basi poste da Weierstrass, Cantor e Dedekind per i passaggi al limite erano malferme. Weyl proprio non riusciva ad accettare il sistema dei numeri reali sui quali riposava l'intera struttura; tutto l'edificio, disse, era «una casa costruita sulla sabbia».[22] Neppure *Das Kontinuum*, il suo personale tentativo di ricostruire il continuo dei numeri reali, lo soddisfaceva pienamente, e quando venne a conoscenza delle idee di Brouwer ne fu conquistato, fino a dichiarare: «Brouwer è la rivoluzione». Era troppo per Hilbert, che forse pensò: «*Et tu, Brute!*». In Germania gli anni Venti furono realmente un'epoca rivoluzionaria. Il Paese aveva perso la prima guerra mondiale ed era stato costretto ad accettare l'umiliante trattato di Versailles; dopo l'abdicazione del Kaiser, il nuovo governo socialdemocratico doveva fronteggiare una grave crisi economica, mentre, sia da destra che da sinistra, si moltiplicavano i tentativi di rovesciarlo; l'estremismo verbale prevaleva in tutti gli schieramenti. In questa atmosfera surriscaldata, in una conferenza tenuta nel 1922 Hilbert reagì alla diserzione del suo ex allievo come di fronte a un tradimento: «Ciò che fanno Weyl e Brouwer consiste essenzialmente nel seguire il percorso aperto a suo tempo da Kronecker: cercano di assicurare un fondamento alla matematica gettando a mare tutto ciò che è loro sgradito e dichiarando appunto un embargo *à la* Kronecker. Ma questo significherebbe smembrare e mutilare la nostra disciplina, e se seguissimo simili riformatori rischieremmo di perdere gran parte dei nostri tesori più preziosi. Weyl e Brouwer mettono fuori legge i concetti generali di numero irrazionale, di funzione e perfino di funzione aritmetica, i numeri [ordinali] di Cantor delle classi numeriche superiori, ecc. Tra gli esempi di asserzioni o forme di inferenza proibiti troviamo il teorema per cui tra infiniti numeri naturali ve n'è sempre uno minimo e perfino la legge logica del terzo escluso – come nell'asserzione che o vi è solo un numero finito di numeri primi, o ve ne sono infiniti. Io credo che, come Kronecker fu incapace di abolire i numeri irrazionali (Weyl e Brouwer ci permettono di conservarne un rudimento), non meno inefficaci risulteranno, oggi, i loro tentativi. No, il programma di Brouwer non è la rivoluzione come pensa Weyl, ma solo la ripetizione di un tentativo di colpo di stato, condotto con vecchi metodi, che a suo tempo fu lanciato con molta più energia eppure fallì miseramente. E specialmente oggi che il potere sovrano è ben armato e fortificato grazie all'opera di Frege, Dedekind e Cantor, questi sforzi sono condannati in anticipo all'insuccesso».[23]

Dal piglio marziale di questa tirata di Hilbert, si potrebbe pensare che fosse anche lui uno dei molti europei che nel 1914 salutarono l'inizio della guerra con euforia e frenesia, ma la verità è completamente diversa: egli lasciò capire fin dal primo momento di considerare la guerra stessa una follia. Nell'agosto del 1914 novantatré intellettuali tedeschi indirizzarono al «mondo civile» un manifesto in cui rispondevano all'indignazione suscitata in Inghilterra, in Francia e negli Stati Uniti dal comportamento dell'esercito tedesco in Belgio affermando: «Non è vero che abbiamo violato illegalmente la neutralità del Belgio ... Non è vero che le nostre truppe hanno brutalmente distrutto Lovanio». Anche a Hilbert era stato chiesto di firmare, ma egli rifiutò dichiarando di ignorare se le accuse fossero vere. Nel 1917, cinque anni prima dell'attacco a Brouwer e Weyl e mentre una sanguinosa guerra di trincea continuava a divorare una generazione di europei, Hilbert scrisse un necrologio fortemente elogiativo del grande matematico francese Gaston Darboux, e quando alcuni studenti che avevano inscenato una dimostrazione davanti a casa sua gli chiesero di rinnegare quella commemorazione di un «matematico nemico», reagì pretendendo e ottenendo le loro scuse ufficiali.[24] In un'altra occasione, poiché alcuni colleghi si opponevano alla nomina a *Privatdozent* (sempre a Göttingen) della giovane e brillante matematica Emmy Noether con l'argomento che per questa via si poteva arrivare ad avere una donna professore ordinario e membro del senato accademico, Hilbert dichiarò: «Non mi sembra che il sesso di un candidato sia un argomento contro la sua nomina a *Privatdozent*. E dopotutto il senato accademico non è un bagno pubblico».[25] Infine, nel settembre del 1917, mentre la Germania e la vicina Francia facevano del loro meglio per massacrarsi vicendevolmente, tenne a Zurigo una conferenza sul «pensiero assiomatico» che cominciava con questa provocatoria considerazione: «Come nella vita delle nazioni un popolo può fiorire solo se ha buoni rapporti con tutti i suoi vicini, e come l'interesse delle nazioni non richiede solo che l'ordine regni in ognuna di esse ma anche che siano ben regolate le relazioni fra l'una e l'altra, così è pure nella vita delle scienze».[26]

LA METAMATEMATICA

Hilbert aveva posto la questione della coerenza dell'aritmetica al secondo posto nell'elenco presentato nel 1900 al Congresso internazionale dei Matematici, ma cominciò ad affrontare sul serio il problema solo negli anni Venti, lavorando a stretto contatto con Wilhelm Ackermann, ancora studente, e col suo assistente Paul Bernays; anche John von Neumann diede il suo contributo.[27] Hilbert partì dal sistema logico dei *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell e inizialmente puntò anche lui sull'obiettivo di Frege e Russell, definire il numero in termini puramente logici; ben presto concluse che tale obiettivo era irrealizzabile e lo abbandonò, continuando però a considerare cruciale la logica simbolica creata dai due inglesi. Nel suo nuovo programma, matematica e logica sarebbero state sviluppate insieme come linguaggio simbolico puramente formale, che poteva essere visto sia «dall'interno» sia «dall'esterno». Visto dall'interno non era che matematica, con ogni passo deduttivo, per quanto piccolo, totalmente esplicitato; visto dall'esterno era invece solo un insieme di formule e manipolazioni di simboli che potevano essere eseguite prescindendo da ogni significato. Hilbert intendeva dimostrare che in un tale linguaggio non si poteva derivare una coppia di formule che si contraddicessero in maniera esplicita; ovvero, in modo equivalente, che non si potevano derivare formule come $1 = 0$ o $0 \neq 0$.

Bisognava fare i conti, però, con la critica di Poincaré e Brouwer: da una prova di non-contraddittorietà basata su quegli stessi metodi che avrebbe dovuto garantire non poteva venir fuori nulla di interessante. Hilbert pensò allora – un'idea veramente audace – di creare una matematica completamente nuova cui diede il nome di *metamatematica* o *teoria della dimostrazione*. All'interno del sistema formale era permesso un uso pieno e illimitato di metodi matematici di tutti i tipi, ma i metodi metamatematici dovevano essere inattaccabili e quindi – il termine è hilbertiano – «finitari». In tal modo Hilbert sperava di fare a Brouwer e Weyl uno sberleffo, dicendo in sostanza: «Ho dimostrato che i matematici non incorreranno mai in contraddizione utilizzando i loro metodi abituali, e l'ho fatto usando metodi che perfino voi approvate». Ovvero, per usare le parole di von Neumann: «La teoria della dimostrazione dovrebbe costruire, per così dire, la matematica classica su base intuizionistica, riducendo in tal modo l'intuizionismo all'assurdo».[28]

Fra i «tesori» matematici che i suoi metodi dovevano salvare vi erano i numeri transfiniti di Cantor, dei quali Hilbert ebbe a dire, enfaticamente: «Questo mi sembra il fiore più ammirevole dell'intelletto matematico, e più in generale una delle massime vette dell'attività puramente razionale dell'uomo».[29] E ancora, respingendo le critiche di Brouwer e Weyl: «Nessuno riuscirà a cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi».[30] Ma Brouwer, pur concedendo che il programma di Hilbert poteva anche realizzare i *propri* obiettivi, non si lasciò impressionare: «... per questa via non si otterrà nulla che abbia un qualche valore, matematicamente parlando: una teoria scorretta resta sempre tale, anche quando non può essere proibita da una contraddizione che la confuti, così come una politica criminale resta sempre criminale anche quando non può essere impedita da un tribunale che la condanni».[31]

Lo scontro fra Hilbert e Brouwer non restò confinato alle parole poiché Hilbert arrivò quasi all'azione legale per estromettere Brouwer dal comitato editoriale dei «Mathematische Annalen» (l'episodio indusse Einstein a criticare duramente questa «battaglia delle rane e dei topi»).[32] La controversia fra Hilbert (e i suoi collaboratori) e Brouwer e Weyl aveva sicuramente le proprie radici in alcuni interrogativi filosofici fondamentali relativi alla natura della conoscenza. E in effetti, entrambi gli schieramenti erano fortemente influenzati dalle idee di Immanuel Kant. Tuttavia, sia la posizione di Hilbert sia quella di Brouwer presero – cosa insolita in una controversia filosofica – la forma di *programmi* che mettevano capo a problemi molto specifici, e si esposero così al rischio di essere confutate dai fatti.

Il principale problema dell'intuizionismo di Brouwer era quello di portare effettivamente a termine la ricostruzione della matematica cui programmaticamente aspirava, così da convincere gli specialisti che era possibile continuare a lavorare anche facendo a meno del continuo classico dei numeri reali e della legge del terzo escluso, e senza mettere a rischio i loro tesori più preziosi. Tuttavia la matematica intuizionistica che Brouwer riuscì di fatto a produrre era, come ebbe a dire molti anni dopo Weyl, «di un'artificiosità quasi intollerabile», e fece pochi proseliti.[33] Lo stesso Brouwer, pur non rinnegando mai le proprie idee, finì per sentirsi sempre più isolato e trascorse gli ultimi anni ossessionato «da preoccupazioni finanziarie totalmente infondate e da un timore paranoico della bancarotta, di essere perseguitato e di ammalarsi». Morì di morte violenta nel 1966, a ottantacinque anni, travolto da un'auto mentre attraversava la strada di fronte a casa.[34] Forse l'aspetto più ironico di questa storia è che l'intuizionismo continua a sopravvivere, benché non nel modo auspicato da Brouwer, cioè come pratica matematica riformata, ma come studio di sistemi logici formali costruiti in modo da includere certe idee brouweriane.[35] Alcuni di questi sistemi sono, di fatto, alla base di programmi per calcolatori che eseguono deduzioni formali e che sono effettivamente in uso.[36]

Quanto al programma di Hilbert, il suo problema principale era ovviamente la coerenza dell'aritmetica, quello dal quale era partito. Vi lavorarono Wilhelm Ackermann e von Neumann, che ottennero alcuni risultati parziali, e si pensava che bastasse affinare ulteriormente l'apparato tecnico per arrivare al risultato finale. Nel 1928 Hilbert pubblicò, insieme al suo allievo Ackermann, uno striminzito manuale di logica basato sul corso che (con l'aiuto di Bernays) teneva ogni anno dal 1917. Il libro poneva due problemi relativi alla logica di base della *Ideografia* di Frege – oggi chiamata *logica del primo ordine*. In un certo senso questi problemi erano da tempo nell'aria, ma solo quando Hilbert capì che i sistemi logici potevano essere visti anche dall'esterno divenne possibile dare loro quella forma precisa in cui ora venivano enunciati. Il primo problema consisteva nel dimostrare che la logica del primo ordine era *completa*, cioè che ogni formula che, vista dall'esterno, apparisse valida poteva essere derivata *dentro* il sistema usando solo le regole proposte dal manuale. Il secondo, noto come l'*Entscheidungsproblem* (problema della decisione) di Hilbert, era quello di trovare un metodo che, data una formula della logica del primo ordine, determinasse, in un numero finito di passi ben definiti ed effettivi, se essa era o non era valida. Come vedremo nel capitolo VII, questi due problemi, e soprattutto l'*Entscheidungsproblem*, fecero rivivere nel ventesimo secolo – e però come problemi concreti, da dare ai matematici perché li risolvessero – quelle speranze che per Leibniz nel Seicento erano state soltanto un sogno.

Anche nel 1928, a Bologna, Hilbert tenne un discorso al Congresso internazionale dei Matematici. Se le condizioni politiche lo permettevano, questi congressi si succedevano regolarmente a intervalli di quattro anni. Naturalmente il congresso del 1916 non ebbe luogo; quelli del 1920 e 1924 invece vi furono, ma gli odi postbellici erano così forti che i rappresentanti della Germania non vennero invitati. Fu Hilbert a insistere perché i matematici tedeschi accettassero l'invito a partecipare al congresso del 1928, superando le proteste di quelli che, come Bieberbach (futuro nazista) e Brouwer, volevano boicottarlo per protesta contro il trattato di Versailles. Nel suo intervento pose un problema relativo a un sistema formale basato sull'applicazione delle regole della logica del primo ordine (sostanzialmente, quelle di Frege) a un'assiomatica dei numeri naturali che oggi è nota col nome di aritmetica di Peano (dal logico italiano Giuseppe Peano), o PA. Hilbert cercava una dimostrazione della *completezza* di PA, intendendo con ciò che di ogni proposizione esprimibile in PA si potesse dimostrare in PA che era vera, oppure si potesse dimostrare in PA che era falsa. Due anni dopo un giovane logico di nome Kurt Gödel avrebbe dato, per questo problema, una soluzione completamente diversa da quella che Hilbert si aspettava, con conseguenze devastanti per il suo programma.

LA CATASTROFE

I biografi di Hilbert descrivono sua moglie Käthe come una persona saggia e di buon senso, fidata, sempre pronta ad aiutare il marito (spesso era lei a scrivergli materialmente gli articoli), buona madre e dispensatrice di consigli sulla vita a quei giovani matematici per i quali casa Hilbert era sempre aperta. Hilbert si considerava un uomo di mondo e usava dire che la migliore vacanza è quella che si fa con la moglie di un collega; d'altronde non si stancava di correre dietro alle gonnelle e non perdeva mai l'occasione per ballare con le donne più giovani e graziose. Le sue «fiamme» erano sulla bocca di tutti, al punto che a una festa di compleanno gli invitati cominciarono a improvvisare dei versi sulle sue avventure, e per ogni lettera dell'alfabeto c'era un nome. Arrivati alla K tutti si bloccarono, e a quel punto Käthe disse: «Be', potreste pensare a me per una volta», e subito spuntarono fuori questi versi (che qui traduco molto liberamente):

Gott sei Dank
nicht so genau
nimmt es Käthe
seine Frau.

[Iddio sia ringraziato/non vi fa caso/Caterina/paziente mogliettina].

Il figlio Franz dava grandi dispiaceri a moglie e marito, ma in modo diverso. La forte somiglianza fisica col padre non faceva che sottolineare l'assenza di qualsiasi affinità mentale, e a un certo punto sforzi e finzioni non bastarono più. Non c'erano dubbi: Franz era gravemente disturbato, e alla fine divenne necessario chiuderlo in un istituto. Il padre reagì alla tragedia convincendosi di non avere più un figlio; la madre non poté rassegnarsi.

Nel 1929 l'istituto di matematica di Göttingen ebbe una sede nuova e bellissima; i fondi venivano – in gran parte grazie all'abilità diplomatica di Richard Courant – dalla Fondazione Rockefeller e dal governo tedesco. Tuttavia, il tempo in cui Göttingen poteva ancora essere il centro della ricerca matematica si approssimava alla fine. Nel 1930, quando Hilbert andò in pensione, Weyl accettò l'offerta di subentrargli. In quello stesso anno Hilbert ricevette la «cittadinanza onoraria» dalla sua città natale, Königsberg. Invitato a tenere per l'occasione una conferenza in autunno davanti a un pubblico di scienziati e medici, scelse, opportunamente, un argomento molto generale: «Scienza della natura e logica». Nel suo discorso sottolineò, partendo da lontano, il ruolo cruciale della matematica nella scienza e della logica nella matematica, e ribadì col suo solito ottimismo che non esistevano problemi insolubili, concludendo con queste parole:[37]

Wir müssen wissen
Wir werden wissen
[Dobbiamo sapere./Sapremo].

A Königsberg, nei giorni immediatamente precedenti la conferenza, aveva avuto luogo un simposio sui fondamenti della matematica. Gli oratori erano A. Heyting, allievo e seguace di Brouwer, il filosofo Rudolf Carnap e John von Neumann, che difendeva il programma hilbertiano di teoria della dimostrazione. Alla tavola rotonda che concluse l'incontro, un giovane molto timido di nome Kurt Gödel (protagonista del prossimo capitolo) fece sommessamente un annuncio che, per coloro che ne afferrarono la portata, segnalava una nuova èra negli studi sui fondamenti. Von Neumann ne comprese subito l'importanza e concluse che non aveva senso continuare: il programma di Hilbert non poteva riuscire. Hilbert reagì con rabbia per quello che aveva tutta l'aria di essere un attacco frontale al suo «*Wir werden wissen*». Ma quando Bernays, in due grossi volumi pubblicati nel 1934 e 1939, fece un bilancio dei risultati ottenuti dalla teoria hilbertiana della dimostrazione, riservò un ruolo di primo piano al lavoro di Gödel.[38]

Nel 1932 i settant'anni di Hilbert vennero debitamente festeggiati nei locali del nuovo istituto di matematica: vi furono brindisi e musica, e naturalmente danze, e il vecchio signore ballò per quasi tutto il tempo. In quello stesso 1932, mentre infuriava la depressione, i nazisti ottennero un grande successo nelle elezioni al Reichstag. Nel gennaio dell'anno successivo Hitler fu nominato cancelliere e poco dopo giunse il collasso della scienza tedesca. Gli scienziati ebrei, non potendo insegnare, si trasferirono uno dopo l'altro all'estero. Richard Courant, che pure aveva combattuto nelle file dell'esercito tedesco durante la prima guerra mondiale, fu buttato fuori dall'istituto di matematica, per il quale aveva fatto tanto, e finì alla New York University; qui avrebbe trovato un altro istituto di matematica, che oggi porta il suo nome e occupa un grazioso edificio del Greenwich Village a New York. L'«ariano» Hermann Weyl trovò intollerabile la situazione politica tedesca e accettò un posto al nuovo Institute for Advanced Study di Princeton, raggiungendo Albert Einstein.[39]

Hilbert era apparentemente sconcertato e disorientato: da un lato criticava apertamente il regime persino quando parlare era diventato molto rischioso, dall'altro non riusciva a capire come il tanto vantato sistema legale tedesco non offrisse più alcuna protezione contro soprusi e arbitri. A una riunione chiese a Blumenthal, il primo studente che prese il dottorato con lui, che cosa insegnasse, e quando Blumenthal rispose che non gli era più permesso insegnare il vecchio signore si indignò. Non capiva come mai l'amico non facesse causa. Blumenthal riparò in Olanda, ma nel 1940, quando i tedeschi invasero il Paese, fu preso in trappola; morì pochi mesi dopo a Theresienstadt, il famigerato ghetto allestito in quella che oggi è la Repubblica Ceca.

Hilbert scomparve nel 1943, mentre ancora infuriava la seconda guerra mondiale, e Käthe lo seguì due anni dopo. Sulla pietra tombale era scritto:

Wir müssen wissen
Wir werden wissen

VI
GÖDEL MANDA TUTTO PER ARIA

Nell'autunno del 1952 mia moglie Virginia e io, da poco arrivati a Princeton per un soggiorno di due anni all'Institute for Advanced Study, stavamo percorrendo in auto la Olden Lane in direzione dell'istituto quando ci trovammo la strada bloccata da due strani personaggi che camminavano lenti, dimentichi di tutto, proprio davanti a noi. Il più alto era trasandato, mentre l'altro indossava un completo inappuntabile e portava una cartella. Quando, con molta prudenza, li superammo riconoscemmo Albert Einstein e Kurt Gödel, e Virginia fece una battuta: «Einstein e il suo avvocato».

I due amici erano diversi non solo per il modo di vestire. Dopo le elezioni presidenziali del 1952 Einstein sbottò: «Gödel è completamente impazzito ... ha votato per Eisenhower»;[1] per un progressista come lui era inconcepibile votare repubblicano. Avevano idee molto lontane anche su alcune questioni filosofiche fondamentali; nella formulazione della teoria della relatività ristretta, Einstein era stato molto influenzato dal positivismo scettico di Ernst

Mach, col suo attacco alla dottrina di Immanuel Kant che i concetti di tempo e spazio, benché oggettivi, sono indipendenti dall'osservazione empirica. Gödel, viceversa, aveva cominciato a leggere Kant nell'adolescenza, e conservò sempre un vivo interesse per i classici tedeschi della filosofia (soprattutto per Leibniz). In uno scritto mai pubblicato in vita e scoperto postumo fra le sue carte sosteneva addirittura che la teoria della relatività, correttamente intesa, in realtà confermava certe idee di Kant sulla natura del tempo.[2] Soleva anche dire, riecheggiando gli attacchi di Frege e Cantor ai limiti del positivismo, che proprio perché aveva rifiutato questa filosofia era riuscito a vedere correlazioni, non osservate dagli altri logici, che avevano reso possibili le sue decisive scoperte.[3]

Nel 1978, dopo la morte di Gödel, fu fondata a Vienna – dove normalmente si riunisce – la Kurt Gödel Gesellschaft, associazione che si occupa di logica e di settori dell'informatica a essa vicini; nell'agosto del 1993, eccezionalmente, gli incontri ebbero luogo a Brno nella Repubblica Ceca, dove Gödel era nato ottantasette anni prima. Il programma della riunione prevedeva non solo una parte scientifica, ma anche una cerimonia in cui le autorità cittadine avrebbero scoperto una lapide commemorativa sulla casa natale del grande logico. Ricordo che rimanemmo con gli ombrelli aperti, sotto la gelida pioggia del primo autunno, ad ascoltare prima gli inevitabili discorsi (in ceco) e poi una banda locale, in coloratissimi costumi tradizionali, che suonava un pezzo dopo l'altro.

Kurt Gödel era nato nel 1906 a Brno, che allora faceva parte dell'Impero austroungarico. Bertrand Russell, per qualche motivo, credeva che fosse ebreo; in realtà la madre era di famiglia protestante mentre il padre nominalmente era un «vecchio cattolico»,[4] ma nessuno dei due andava in chiesa. Kurt frequentò esclusivamente scuole di lingua tedesca;

e dato che aveva abitudini molto meticolose e non buttava via nulla, disponiamo di un quadro insolitamente ricco delle sue scuole elementari. Le pagelle ci presentano un allievo che prendeva il massimo dei voti in tutte le materie, e i quaderni rivelano che i programmi (e gli esercizi) erano pesanti. A otto anni Kurt si ammalò di febbri reumatiche, ma non sembra che ne ricevesse danni fisici permanenti; tuttavia – probabilmente in seguito a questa malattia – divenne ipocondriaco, e lo rimase per tutta la vita. Secondo il fratello maggiore Rudolf mostrava segni di instabilità mentale anche da bambino.[5]

Quando, dopo la prima guerra mondiale, l'Impero austroungarico venne smembrato, i Gödel si ritrovarono ad appartenere alla consistente minoranza di lingua tedesca della neonata repubblica cecoslovacca. Ben presto Vienna, dove si parlava tedesco e distante da Brno poco più di cento chilometri, attirò Kurt e Rudolf con la sua ottima università. Kurt, che a Brno aveva ricevuto una formazione rigorosa e vantava un curriculum di prim'ordine, vi arrivò nell'autunno del 1924 e andò ad abitare insieme a Rudolf, che era già lì da qualche tempo e studiava medicina. All'inizio intendeva studiare fisica, ma dopo aver scoperto la bellezza delle strutture aritmetiche nelle lezioni sulla teoria dei numeri, decise che la sua vera vocazione era la matematica.

La Repubblica austriaca, nata alla fine della prima guerra mondiale dalle macerie dell'Impero austroungarico, durò appena vent'anni. Nel 1938 venne assorbita dalla Germania nazista. Fu un periodo di tensioni e di caos, e il paese si trovò più volte sull'orlo di una guerra civile tra la capitale «rossa» (in realtà era socialdemocratica) e una provincia profondamente conservatrice. Eppure, in questa atmosfera turbolenta fiorì il celebre Circolo di Vienna. L'opera di Whitehead e Russell aveva dato alla matematica un linguaggio artificiale che permetteva di

Kurt Gödel e Albert Einstein (Richard Arens) affidare le dimostrazioni dei teoremi a operazioni formali puramente simboliche; il Circolo fu fondato nel 1924 da un gruppo di filosofi e scienziati che continuavano la tradizione empiristico-positivista di Mach e Helmholtz. Queste stesse idee erano state duramente attaccate da Cantor e Frege, come ho già ricordato nel capitolo IV; ma i membri del Circolo aborrivano la metafisica tradizionale e pensavano che la filosofia dovesse porsi come obiettivo primario la creazione e lo studio di sistemi simbolici come quello di Whitehead-Russell, che abbracciassero tuttavia non solo la matematica ma anche la scienza empirica. Quando uno dei fondatori, Moritz Schlick, fu assassinato nel 1936 da un ex allievo squilibrato, i nazisti giustificarono l'omicidio con le sue presunte idee di sinistra. Fra le altre figure rappresentative del Circolo vi erano Rudolf Carnap, che aveva studiato con Frege, e Hans Hahn, che sarebbe stato il più importante maestro di Gödel.[6]

IL RITORNO DEL FANTASMA DI KRONECKER

Mentre le idee di Bertrand Russell sui fondamenti della matematica si erano concretizzate nei tre massicci volumi dei *Principia Mathematica*, quelle del suo brillante e stravagante allievo Ludwig Wittgenstein furono presentate al mondo in uno scarno lavoro di settantacinque pagine, il *Tractatus Logico-Philosophicus*. Le riflessioni di questi due filosofi ebbero un ruolo importante nelle discussioni del Circolo di Vienna. Quando Gödel, accogliendo l'invito del suo maestro Hans Hahn, cominciò nel 1926 a frequentare queste riunioni, scoprì di essere in disaccordo con molte di queste idee. Tuttavia l'eccitante miscuglio di Russell, con la sua dimostrazione che tutta la matematica ordinaria può essere racchiusa in un sistema logico formalizzato, e di Wittgenstein, che sottolineava i problemi derivanti dal parlare del linguaggio da dentro il linguaggio, dovette influire sulla direzione presa dalle sue ricerche. Le preoccupazioni di Wittgenstein riecheggiavano la tesi di Hilbert che i sistemi logici formali non solo erano in grado di rappresentare, al proprio interno, il ragionamento matematico, ma potevano a loro volta essere studiati dall'esterno con metodi matematici.

Nei suoi corsi di logica a Göttingen, Hilbert adottava le regole deduttive fondamentali proposte da Frege nell'*Ideografia* e incorporate nei *Principia Mathematica* da Whitehead e Russell; ma nel manuale di logica del 1928, scritto insieme all'allievo Wilhelm Ackermann, poneva anche il problema se in queste regole vi fossero delle lacune, ovvero se esistessero inferenze deduttive in linea di principio corrette ma tali che le regole di Frege non permettessero di ricavare la conclusione dalle premesse. Non credeva nell'esistenza di queste lacune ma voleva darne la dimostrazione, provare che le regole erano *complete*. Per la sua tesi di dottorato Gödel scelse proprio questo problema. Riuscì a ottenere rapidamente il risultato auspicato da Hilbert, ma la situazione aveva qualcosa di ironico: i logici avevano familiarità con le tecniche di Gödel, ma avevano le mani legate, come vedremo, dall'influenza delle restrizioni alla Brouwer-Weyl nonché dalla loro tacita accettazione da parte di Hilbert, che le considerava appropriate nelle ricerche metamatematiche.

La deduzione logica parte da determinate premesse e arriva a una conclusione. Nella logica simbolica di Frege-Russell-Hilbert, premesse e conclusione sono rappresentate da formule logiche, cioè da pure e semplici successioni di simboli; alcuni di questi simboli stanno per concetti puramente logici, altri sono segni di punteggiatura e altri ancora si riferiscono all'argomento specifico della formula.

Ecco, ad esempio, un'inferenza logica nella quale le prime due righe rappresentano le premesse e la terza la conclusione:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Chiunque ami è felice}\\ \text{William ama Susan}\end{array}}{\text{William è felice}}$$

Usando il simbolismo introdotto nel capitolo III possiamo darne questa traduzione in linguaggio logico:

$$\frac{\begin{array}{c}(\forall x)\big((\exists y)A(x,y)\supset F(x)\big)\\ A(W,S)\end{array}}{F(W)} \qquad (*)$$

I simboli logici utilizzati sono $\supset$, $\forall$ e $\exists$, di cui ricordiamo qui di seguito il significato:

$\supset$ se... allora...
$\forall$ ogni
$\exists$ qualche

Le lettere x e y fungono da *variabili*, cioè indicano (come i pronomi) individui indeterminati della popolazione considerata. Gli altri simboli (A, F, W, S) hanno invece significati pertinenti all'argomento specifico:

A = la relazione di amare
F = la proprietà di essere felici
W = William
S = Susan

Possiamo dunque leggere l'inferenza così:

Per ogni *x*, se esiste un *y* tale che *x* ama *y*, *x* è felice
William ama Susan

William è felice

Dire che *questa inferenza è valida* significa: quale che sia l'universo-base di individui prescelto, quale che sia la relazione fra questi individui indicata con la lettera *A*, quale che sia la proprietà dei medesimi individui indicata con la lettera *F*, quali che siano i particolari individui che decidiamo di designare con *W* e *S*, se tutte queste scelte sono tali che entrambe le premesse siano enunciati veri, sarà vera anche la conclusione. Per chiarire ulteriormente che cosa significa la *validità* di una deduzione, può essere utile considerare un'altra interpretazione, con oggetti diversissimi, della stessa inferenza simbolica:

I predatori hanno denti aguzzi
I lupi predano le pecore

I lupi hanno denti aguzzi

Com'è facile verificare, anche questo esempio è un caso particolare dell'inferenza simbolica (*). Supponiamo che le variabili *x* e *y* indichino specie qualsiasi di mammiferi e interpretiamo le altre lettere così:

A = la relazione predatore-preda
F = la proprietà di avere denti aguzzi
W = lupi
S = pecore

A questo punto l'inferenza può essere letta così:

Per ogni *x*, se esiste un *y* tale che *x* preda *y*,
allora *x* ha denti aguzzi
I lupi predano le pecore

I lupi hanno denti aguzzi

Hilbert voleva dimostrare che, per ogni inferenza valida nel senso appena spiegato, esiste una derivazione della conclusione dalle premesse che utilizza, passo dopo passo, le regole di Frege-Russell-Hilbert. In altri termini, che se una presunta inferenza è tale che

per ogni interpretazione delle lettere presenti nelle formule tale che le premesse siano enunciati veri, anche la conclusione è vera,

allora è possibile passare dalle premesse alla conclusione usando le regole di Frege-Russell-Hilbert. Nella sua tesi di dottorato, Gödel riuscì a fornire proprio la dimostrazione richiesta da Hilbert.

La prova di Gödel era argomentata con la chiarezza e la semplicità che avrebbero contrassegnato anche le pubblicazioni successive di questo autore; ma sebbene costituisse un grandissimo risultato – la cui importanza divenne chiara solo col passare del tempo – i metodi, tutti ben noti ai logici dell'epoca, non erano certo una novità. C'è da stupirsi che una squadra poderosa come quella formata da Hilbert, Ackermann e Bernays non riuscisse a trovarla. In effetti, molti anni dopo lo stesso Gödel osservò che il suo teorema era una «conseguenza quasi banale» dei risultati contenuti in un articolo del logico norvegese Thoralf Skolem pubblicato nel 1923, cioè sei anni prima della sua tesi di dottorato (e che però presumibilmente né lui né il suo relatore conoscevano). In una lettera del 1967, rievocando gli anni Venti, Gödel parlava di una «cecità ... dei logici davvero sorprendente», ma aggiungeva anche: «Penso che la spiegazione non sia difficile da trovare: sta nel fatto che all'epoca l'atteggiamento epistemologico verso la metamatematica e il ragionamento non finitario che sarebbe stato necessario era poco diffuso».[8]

Dopo le critiche di Brouwer e Weyl (discusse nel capitolo V) al ragionamento non finitario, e dopo che Hilbert aveva creato una metamatematica che concedeva *solo* ragionamenti finitari, era, per lo meno tacitamente, accettato che lo studio dall'esterno dei sistemi logici formali dovesse limitarsi a metodi strettamente finitari, metodi contro i quali lo stesso Brouwer non avrebbe avuto nulla da obiettare.[9] In effetti il teorema di completezza di Gödel non può essere dimostrato senza usare procedimenti non finitari. Senza contestare né gli obiettivi del programma di Hilbert né le sue restrizioni metodologiche, Gödel spiega così perché nel suo caso solo questi erano adatti: «... non è stata la controversia sui fondamenti della matematica a far emergere il problema qui affrontato (come è accaduto invece per quello della coerenza della matematica); al contrario, tale problema avrebbe avuto senso anche all'interno di una matematica "ingenua" e anche se la correttezza di quest'ultima non fosse mai stata messa in discussione (a differenza, per esempio, di quello della coerenza), *ed è per questo che qui imporre delle restrizioni ai metodi di prova non sembra più imperativo che per un qualsiasi altro problema*» (corsivo mio).[10]

Dunque Gödel accettava le indicazioni di Hilbert e si limitava ai metodi finitari nelle ricerche volte a garantire i fondamenti della matematica, ma non vedeva alcuna ragione per sopportare una simile camicia di forza per questioni di logica matematica estranee a questo tipo di ricerca.

PROPOSIZIONI INDECIDIBILI

Il secondo problema del celebre elenco hilbertiano del 1900 era come dimostrare che l'aritmetica dei numeri reali non era contraddittoria. All'epoca nessuno aveva idea di come si potesse sviluppare una simile dimostrazione, e in particolare di come evitare la trappola della circolarità, ovvero dell'uso nel corso della prova degli stessi metodi che questa cercava di giustificare. Negli anni Venti, Hilbert, come abbiamo visto nel capitolo precedente, presentò il suo programma metamatematico: gli assiomi di cui si voleva provare la non-contraddittorietà andavano inseriti in un sistema logico formale nel quale una dimostrazione non era che una certa configurazione di un numero finito di simboli. Dopodiché l'impossibilità di derivare una contraddizione in questo sistema doveva essere dimostrata con i cosiddetti metodi finitari (come li chiamava Hilbert), ancora più restrittivi di quelli che sarebbe stato disposto ad ammettere Brouwer. Quando Gödel, dopo avere completato la tesi di dottorato, cominciò a occuparsi di questo problema, il programma di Hilbert sembrava prossimo al successo.

Al Congresso internazionale di Bologna del 1928, Hilbert aveva parlato di quella che oggi chiamiamo aritmetica di Peano, o PA: la teoria fondamentale (formalizzata) dei numeri naturali 1, 2, 3, ... Quando Gödel cominciò a riflettere sul programma di Hilbert, Ackermann e von Neumann sembravano ormai molto vicini a una dimostrazione finitaria di non-contraddittorietà per PA. Entrambi avevano già ottenuto questo risultato per un sottosistema di PA limitato, e sembrava che la loro avanzata fosse bloccata solo da difficoltà tecniche destinate comunque a essere superate; è possibile che anche Gödel fosse di questa opinione. In ogni caso, egli si pose il problema di dimostrare la coerenza *rispetto a* PA di sistemi più potenti; c'erano già state diverse prove di coerenza relativa, per cui l'idea era del tutto naturale. Gödel sperava cioè di trovare una riduzione finitaria della coerenza di certi sistemi molto potenti, adeguata all'aritmetica dei numeri reali, e ancor più alla coerenza di PA. Era un proseguire nella stessa direzione di Hilbert, che aveva ridotto la coerenza della geometria euclidea a quella dell'aritmetica dei numeri reali. Gödel voleva far avanzare la riduzione di un altro passo, e se vi fosse riuscito e in più i seguaci di Hilbert avessero provato la coerenza di tutta PA, ne sarebbe automaticamente seguita una dimostrazione della coerenza dell'aritmetica dei numeri reali, cioè la realizzazione di quanto Hilbert aveva chiesto col suo secondo problema del 1900. Ma nulla di ciò sarebbe mai accaduto: Gödel non solo non riuscì nel suo tentativo, ma dimostrò che era impossibile riuscirvi. Così, anziché mettere la matematica al riparo dalle critiche di Brouwer-Weyl, come chiaramente aveva sperato, di fatto seppellì il programma di Hilbert.

Non appena cominciò a occuparsi di questi problemi, Gödel si trovò a riflettere su quello che poteva significare «considerare un sistema logico formale dall'esterno anziché dall'interno». Whitehead e Russell avevano mostrato, in modo molto convincente, che tutta la matematica ordinaria poteva essere sviluppata *dentro* un sistema formale; e nella sua metamatematica Hilbert si proponeva di usare metodi matematici (soggetti a limitazioni molto rigide) per studiare proprio questi sistemi dal di fuori. Perché, allora, non sviluppare la metamatematica stessa dentro un sistema logico formale? Visti dall'esterno, questi sistemi comportano relazioni fra stringhe di simboli; visti dall'interno esprimono proposizioni su vari oggetti matematici, compresi i numeri naturali. Oltretutto, non è difficile trovare un modo per *codificare* le stringhe di simboli per mezzo di numeri naturali. *Con una tale codifica l'esterno può essere portato all'interno!* Torniamo, per fare un esempio, all'espressione simbolica della premessa «Chiunque ami è felice»:

$$(\forall x)\big((\exists y)A(x,y) \supset F(x)\big) \qquad (\dagger)$$

Qui abbiamo una stringa di dieci simboli:

$, A\ F \supset \forall \exists\ x\ y\ (\ )$

Possiamo usare una codifica molto semplice in cui ogni simbolo è rimpiazzato da una cifra decimale; per esempio così:

$$\begin{array}{cccccccccc} , & A & F & \supset & \forall & \exists & x & y & (&) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Sostituendo i simboli con le cifre in (†) nel modo appena indicato, otteniamo il codice numerico

84698857918607932869

Si noti che si passa facilmente dalla stringa di simboli al numero che la codifica, e che è altrettanto facile andare nella direzione opposta. Naturalmente quando i simboli sono più di dieci si deve usare una codifica diversa, ma ciò non è un problema. Se ad esempio facciamo corrispondere a ogni simbolo una coppia di cifre decimali, possiamo codificare fino a cento simboli. Metodi sostanzialmente uguali si possono applicare a qualsiasi sistema logico formale, così da codificare tutte le sue espressioni (viste sempre dall'esterno, cioè come stringhe di simboli) per mezzo di numeri naturali.[11]

Gödel non ebbe difficoltà a riconoscere che era possibile utilizzare i codici per costruire la metamatematica di un sistema logico formale all'interno del sistema stesso; ma nel corso di questa riflessione finì con l'imbattersi in pensieri rigorosamente vietati dalle direttive del Circolo di Vienna. Scoprì infatti l'esistenza di proposizioni di cui si poteva vedere che erano vere ponendosi all'esterno del sistema, ma che internamente al sistema non erano dimostrabili. Per molti esponenti del Circolo l'idea di una verità matematica disgiunta dalla dimostrabilità era priva di senso, una chimera della metafisica idealistica. Gödel, non essendo intralciato da simili remore, giunse alla notevole conclusione che, al contrario, non solo esisteva una nozione di verità matematica dotata di senso, ma che la sua estensione andava al di là di ciò che poteva essere dimostrato in qualsiasi sistema formale. Questo risultato valeva per un'ampia gamma di sistemi logici formali, da quelli relativamente deboli, come PA, a sistemi come quello dei *Principia Mathematica* (PM) di Whitehead e Russell, che conteneva tutta la potenza della matematica classica. Per ognuno di questi vi sono proposizioni vere esprimibili nel sistema ma non dimostrabili in esso. Nel suo straordinario lavoro *Su alcune proposizioni formalmente indecidibili dei «Principia Mathematica» e di sistemi affini* pubblicato nel 1931, Gödel decise di presentare i suoi risultati per PM, dimostrando così che nemmeno sistemi formali molto potenti potevano sperare di abbracciare l'intero dominio della verità matematica.[12]

Il passo cruciale del suo procedimento era la dimostrazione che *la proprietà di un numero naturale di essere il codice di una proposizione dimostrabile in PM è essa stessa esprimibile in PM*. Forte di questo risultato, Gödel riuscì a costruire in PM proposizioni che, pur di conoscere la codifica usata, potevano essere interpretate come esprimenti il fatto che una certa proposizione non era dimostrabile in PM; vale a dire proposizioni A che, lette tramite la codifica, asserivano che una certa proposizione B non era dimostrabile in PM. Osservando A, una persona ignara del codice vedrebbe una stringa di simboli esprimente una complicata e misteriosa proposizione sui numeri naturali. Conoscendo il codice il mistero svanisce: A esprime la proposizione che una certa stringa di simboli B rappresenta una proposizione non dimostrabile in PM. Gödel si chiese se A e B, che normalmente sono proposizioni diverse, potessero coincidere. In effetti potevano, e Gödel riuscì a dimostrarlo usando un trucco matematico appreso da Georg Cantor, il *metodo della diagonale*. Con questa tecnica si poteva fare in modo che la proposizione *di* cui si asseriva l'indimostrabilità e quella *in* cui si faceva tale asserzione fossero una e una sola. In altre parole Gödel era riuscito a ottenere una proposizione notevolissima, che chiameremo U, con le seguenti proprietà:

- U dice che una certa proposizione non è dimostrabile in PM
- Quella particolare proposizione è la stessa U.
- Quindi U dice: «U non è dimostrabile in PM».

L'opinione prevalente, tra gli aderenti al Circolo di Vienna, era che la sola nozione di «verità» che avesse senso per le proposizioni espresse in un sistema come PM fosse quella di dimostrabilità secondo le regole del sistema, ma le proprietà di U rendono indifendibile questa posizione. Se siamo disposti a supporre che PM non menta e tutto ciò che in PM viene dimostrato sia vero,[18] arriviamo alla conclusione che U è vera ma non dimostrabile in PM attraverso questi passi.

1. *U è vera.* Supponiamo infatti che sia falsa: allora è falso quello che dice, e cioè che U non è dimostrabile in PM; quindi U dev'essere dimostrabile in PM, ed essendo dimostrabile dev'essere vera. Ma questo contraddice l'ipotesi che sia falsa. Quindi U è vera.
2. *U non è dimostrabile in PM.* Poiché U è vera, deve essere vero quello che dice; quindi U non è dimostrabile in PM.
3. *La negazione di U (scritta $\neg U$) non è dimostrabile in PM.* Poiché U è vera, $\neg U$ è falsa, e quindi anch'essa è indimostrabile in PM.

Per sottolineare che in PM non sono dimostrabili né U né la sua negazione $\neg U$, si dice che U è una *proposizione indecidibile*; ma non si sottolineerà mai abbastanza che questa indecidibilità è soltanto *interna* al sistema. Dal nostro punto di vista *esterno* U è chiaramente vera.[14]

Qui, però, ci imbattiamo in qualcosa di strano. Sappiamo che U è *vera*, benché indimostrabile in PM. Ora, dato che tutta la matematica ordinaria è racchiusa in PM, perché la dimostrazione della verità di U non può essere condotta *internamente* a PM? Gödel si rese conto che la cosa era quasi possibile, ma c'era un inciampo. Entro PM si può dimostrare che

Se PM è coerente, allora U

Ciò che blocca la dimostrazione di U in PM, quindi, è solo l'ipotesi aggiuntiva della coerenza di PM. Poiché sappiamo che U non è dimostrabile in PM, dobbiamo concludere che la coerenza di PM non può essere dimostrata in PM. Tuttavia lo sforzo del programma di Hilbert era teso a dimostrare la coerenza di sistemi come PM usando metodi finitari che si riteneva formassero un sottoinsieme molto più piccolo di quelli disponibili in PM stesso. Ma Gödel aveva dimostrato che PM non poteva provare la propria coerenza nemmeno facendo ricorso a tutta la propria potenza. Il programma di Hilbert, almeno nella sua forma originaria, era morto![15]

KURT GÖDEL, PROGRAMMATORE DI CALCOLATORI

Nel 1930, la costruzione di un dispositivo fisico reale che fosse in grado di funzionare come un calcolatore generale programmabile per l'elaborazione di informazioni era ancora lontana decenni; eppure, una persona esperta dei moderni linguaggi di programmazione che legga oggi l'articolo sull'indecidibilità scritto in quell'anno da Gödel vi troverà una successione di quarantacinque formule numerate molto simile a un programma per calcolatore. Né la somiglianza è ~~accidentale~~: per dimostrare che la proprietà di essere la codifica di una dimostrazione di PM è esprimibile *in* PM Gödel dovette affrontare molti dei problemi con cui deve confrontarsi chi progetta linguaggi di programmazione o in tali linguaggi scrive dei programmi. Al livello più fondamentale, i calcolatori odierni possono eseguire solo operazioni molto semplici su brevi successioni di 1 e 0, mentre i progettisti dei cosiddetti linguaggi di programmazione di alto livello devono fornire ai programmatori espressioni in cui siano condensate le operazioni altamente complesse con le quali desiderano lavorare. Per essere eseguito da un calcolatore, un programma scritto utilizzando queste espressioni va tradotto in linguaggio macchina, cioè in un elenco dettagliato delle operazioni di base indispensabili per l'esecuzione, e la traduzione è affidata a programmi appositi, detti *interpreti* o *compilatori*.[16]

La pietra angolare della dimostrazione gödeliana dell'esistenza di proposizioni indecidibili consiste nel fatto che la dimostrabilità in PM può essere espressa in PM stesso. Gödel sapeva bene che i suoi rivoluzionari risultati avrebbero trovato un uditorio quanto mai scettico, e voleva eliminare ogni possibile dubbio. A quel punto il suo problema diventava quello di spezzettare le complesse operazioni sui codici delle stringhe di simboli corrispondenti agli assiomi e alle regole d'inferenza di PM visti dall'esterno. Per risolverlo creò una sorta di linguaggio speciale in cui le operazioni richieste potevano essere sviluppate passo a passo;[17] ogni passo definiva un'operazione su numeri alla quale corrispondeva, grazie al codice da lui introdotto, un'operazione paralta su espressioni di PM. In tale linguaggio le definizioni erano espresse in termini di oggetti definiti nei passi precedenti; il linguaggio stesso era costruito in modo da garantire che le operazioni introdotte da tali definizioni fossero correttamente esprimibili in PM.

Leibniz si era proposto di creare un linguaggio artificiale in cui buona parte del pensiero umano fosse ridotta a calcolo; nella *Ideografia* Frege aveva mostrato come fosse concretamente possibile catturare i normali ragionamenti logici dei matematici; Whitehead e Russell erano riusciti a rielaborare la matematica corrente in un linguaggio logico artificiale; Hilbert si era proposto di studiare la metamatematica di questi linguaggi logici; ma prima di Gödel nessuno aveva mostrato come questi concetti metamatematici potessero venire inglobati nei linguaggi medesimi.[18]

Oltre a costruire una proposizione indecidibile *U*, Gödel desiderava dimostrare che la sua enunciazione non richiedeva concetti matematici insoliti o strani; per mostrare che tutte le operazioni esprimibili nella sua speciale notazione potevano venire espresse nel linguaggio di base dell'aritmetica dei numeri naturali usò un teorema della teoria elementare dei numeri, il cosiddetto *teorema cinese del resto*.[19] Ne seguiva che pure la proposizione indecidibile *U* era esprimibile in questo linguaggio di base; in altri termini, si poteva scrivere *U* usando un vocabolario che ammetteva solo variabili i cui valori fossero numeri naturali arbitrari, le operazioni aritmetiche + e ×, il simbolo = e le operazioni fondamentali della logica di Frege, che oggi scriviamo $\neg$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\exists$ e $\forall$. La conclusione, davvero notevole, era che anche limitandosi a questo vocabolario così scarno si potevano costruire proposizioni indecidibili in PM.

Il 26 agosto 1930, al Reichsrat Café di Vienna, il ventiquattrenne Kurt Gödel stava parlando con Rudolf Carnap della Conferenza sull'epistemologia delle scienze esatte prevista a Königsberg di lì a dieci giorni. Carnap, esponente di primo piano del Circolo di Vienna, allora sulla quarantina, doveva tenere una delle relazioni principali: avrebbe parlato del programma logicista per i fondamenti della matematica, che aveva raggiunto la sua più alta realizzazione con i *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell. Dagli appunti di Carnap risulta che Gödel gli aveva comunicato la sua sensazionale scoperta dell'esistenza di proposizioni sui numeri naturali indecidibili in PM. I due logici fecero il viaggio a Königsberg insieme, e con loro c'erano anche altri partecipanti alla conferenza. Il primo giorno vi furono tre relazioni di un'ora ciascuna sui fondamenti della matematica: aprì i lavori Carnap, che parlò del logicismo e – cosa notevole – non accennò nemmeno ai nuovi risultati di Gödel; lo seguì A. Heyting, allievo di Brouwer, che parlò dell'intuizionismo, e l'ultimo della giornata fu John von Neumann, che discusse il programma di Hilbert.[20]

Il secondo giorno, oltre alle relazioni, vi furono tre interventi di una ventina minuti, compreso quello di Gödel, che illustrò la sua tesi di dottorato sulla completezza delle regole di Frege. Ma la bomba esplose il giorno dopo, durante una tavola rotonda sui fondamenti della matematica. Gödel cominciò con un'analisi abbastanza lunga, ma problematica, dei vantaggi che poteva dare una prova della coerenza di un sistema come PM, e affermò che anche nell'ipotesi che un tale sistema fosse coerente, sarebbe stato senz'altro possibile dimostrare *in* esso una proposizione sui numeri naturali che vista dall'esterno sarebbe risultata falsa. In altre parole, la pura e semplice coerenza di un sistema non garantiva che ciò che in esso veniva dimostrato fosse vero. Quindi Gödel – incoraggiato, a quanto pare, da un commento positivo di von Neumann – proseguì affermando che, ammessa la coerenza del sistema, «si potevano dare persino proposizioni» di forma aritmetica semplice che erano vere ma indimostrabili nel sistema. «Aggiungendo [a PM] la negazione di una di queste proposizioni» soggiunse, si otteneva un sistema coerente nel quale era dimostrabile una proposizione falsa.[21]

Alla fine della seduta, von Neumann – che, a quanto pare, aveva colto immediatamente la portata di queste asserzioni – cercò Gödel per continuare la discussione. Per quello che ne sappiamo, nessun altro capì che cos'era accaduto. Continuando a riflettere sulla cosa, von Neumann si convinse (per ragioni che abbiamo già spiegato) che il risultato di Gödel implicava che la coerenza stessa di PM era indimostrabile, e ne concluse che quella era la fine del programma di Hilbert. Quando gli arrivò una sua lettera in cui si parlava di tutto questo, Gödel aveva già inviato a una rivista l'articolo nel quale enunciava la stessa conclusione; così, in un'altra lettera spedita per ringraziarlo di avergli fatto avere tale articolo in anteprima von Neumann scrisse, forse con qualche rimpianto: «Poiché lei ha già stabilito l'indimostrabilità della coerenza come continuazione e approfondimento naturale dei suoi precedenti risultati, è ovvio che io non pubblicherò nulla su questo argomento».[22] La logica e i fondamenti della matematica erano tra gli interessi principali di von Neumann, che divenne buon amico di Gödel, tenne molte conferenze sulla sua opera, e di lui disse che era il più grande logico mai vissuto dai tempi di Aristotele.[23] Quanto a lui, smise di fare logica in prima persona. E quando, più di dieci anni dopo, riprese a occuparsene, lavorò su una logica che prendeva corpo nello hardware: il calcolatore digitale generale.

Uno dei suoi futuri collaboratori in questo campo riferisce un aneddoto che lo stesso von Neumann soleva raccontare a proposito dei suoi tentativi di dimostrare la coerenza dell'aritmetica: «Alla fine di un'giornata di lavoro [von Neumann] andava a letto e spesso si svegliava in piena notte con qualche nuova idea ... In quel periodo si stava dando molto da fare per trovare una prova [della coerenza dell'aritmetica], ma senza successo. Una notte sognò che poteva superare l'inghippo in un certo modo, e riuscì a portare la dimostrazione molto avanti ... Il mattino dopo tornò alla carica, di nuovo invano, e di nuovo la notte seguente fece un sogno. Questa volta intravide la via per superare la difficoltà, ma quando si alzò ... c'era ancora una lacuna».

Le cose sarebbero andate diversamente, usava dire von Neumann, se avesse sognato anche la terza notte.[24]

La conferenza in cui Gödel lanciò la sua bomba era solo un'appendice dell'evento principale che aveva luogo in quella settimana a Königsberg, l'assemblea della Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte [Società degli Scienziati e Medici tedeschi], la cui prolusione fu tenuta, il giorno dopo la tavola rotonda, da David Hilbert. Fu in quell'occasione che Hilbert formulò il motto, ancora inciso sulla sua pietra tombale, in cui proclamava la sua fede nella possibilità – di più: nell'obbligo – di risolvere tutti i problemi matematici: «*Wir müssen wissen, wir werden wissen*». Ma il teorema d'incompletezza di Gödel mostra che se la matematica viene ristretta a ciò che può venire compreso in uno specifico sistema formale, come PM, la fede di Hilbert era illusoria: quale che sia il formalismo dato, vi sono problemi matematici che lo trascendono. È anche vero, però, che in linea di principio ognuno di questi problemi apre la via a un sistema più potente che permette di risolverlo; possiamo immaginare una gerarchia di sistemi sempre più potenti ognuno dei quali permette di rispondere a domande lasciate senza risposta da quelli più deboli. Sul piano teorico tutto ciò è inconfutabile, ma non è altrettanto chiaro fino a che punto possa trasformarsi in pratica matematica. Gödel ha lasciato in eredità ai matematici il compito di imparare a usare questi sistemi più potenti per risolvere problemi altrimenti intrattabili; e però, nonostante alcuni coraggiosi già abbiano lavorato in questa direzione, la maggioranza dei matematici continua a ignorare tali questioni, e vi sono specialisti che considerano questo tipo di lavoro con estremo scetticismo.[25]

AMORE E ODIO

Olga Taussky-Todd, compagna di corso di Gödel a Vienna, che in seguito divenne un'eccellente specialista di teoria dei numeri, racconta che gli altri studenti conoscevano bene le capacità di Kurt, il quale era sempre pronto ad aiutarli quando incontravano qualche difficoltà. La Taussky-Todd riferisce un divertente aneddoto: «Non c'è dubbio che Gödel avesse un debole per il gentil sesso, e non ne faceva mistero ... Stavo lavorando nell'auletta dei seminari accanto alla biblioteca del seminario matematico. Si aprì la porta ed entrò una ragazza giovanissima, esile. Era graziosa ... e indossava un vestito estivo molto bello, e decisamente originale. Poco dopo fece il suo ingresso Kurt; lei si alzò e i due uscirono insieme. Chiaramente, Kurt voleva fare bella figura».[26] Gödel conobbe Adele, la donna che sarebbe diventata la compagna della sua vita, da studente, dieci anni prima di sposarla; all'epoca lei stava ancora col primo marito e faceva la ballerina.[27] I genitori di lui non erano molto contenti: Adele era più vecchia di sei anni, e per giunta era cattolica. Inoltre, a Vienna le ballerine avevano fama, non si sa se meritata o meno, di concedersi facilmente per denaro.[28] Kurt – forse proprio per queste ragioni – circondò di riserbo la relazione, che verosimilmente all'epoca delle nozze era già molto stretta. Quando finalmente i due si sposarono, la stessa esistenza della sposa fu per i colleghi di Gödel una sorpresa.[29] Poco dopo la morte di Kurt, Rudolf (che era rimasto scapolo) scrisse: «Non mi permetterei mai di giudicare il matrimonio di mio fratello».[30] Ma la felicità coniugale è sempre una cosa misteriosissima; capita spesso che le previsioni delle persone più anziane, e in teoria più sagge, si rivelino errate, e così andò anche per i Gödel, il cui matrimonio fu duraturo e felice.

I tentativi di Kurt di fare una carriera universitaria in Austria avvenivano sullo sfondo di eventi politici, sociali ed economici tumultuosi. Alla piccola nazione di lingua tedesca emersa dalle macerie dell'Impero austroungarico le potenze alleate avevano proibito di realizzare l'aspirazione della maggioranza dei cittadini: unirsi alla Germania. In ogni caso l'indipendenza e la democrazia del Paese non durarono a lungo. La guerra civile strisciante fra la Heimwehr, organizzazione paramilitare di destra, e lo Schutzbund socialdemocratico giunse al culmine nel 1927, quando alcuni fascisti uccisero un vecchio e un bambino, una giuria rifiutò di condannare gli assassini e una manifestazione indetta dalla sinistra si concluse con l'incendio del ministero della Giustizia e la morte di quasi cento persone. Alla fine del 1929 il presidente della repubblica ottenne il potere di governare per decreto. Nel frattempo la crisi economica mondiale (o Grande Depressione, per usare il termine americano) non lasciava spazio alla politica moderata, e giunse infatti la svolta autoritaria del regime di Dollfuss che, regolarmente eletto nel 1932, privò il Parlamento di qualsiasi ruolo significativo. Ma il peggio doveva ancora arrivare. All'inizio del 1934, con Hitler al potere in Germania, furono aboliti tutti i partiti tranne il Fronte patriottico di Dollfuss; pochi mesi dopo lo stesso cancelliere Dollfuss veniva assassinato da nazisti austriaci, nel corso di un fallito tentativo di colpo di stato. Gli succedette von Schuschnigg, che per qualche anno riuscì a tenere Hitler a bada con l'aiuto di Mussolini; la fine giunse con l'*Anschluss* dell'Austria al Terzo Reich nel marzo del 1938.

Gödel iniziò la sua lunga ascesa accademica nel febbraio 1933, con l'incarico ufficiale di *Dozent*; intanto si era impegnato a fondo nel seminario di logica diretto da Hahn, il relatore della sua tesi, nonché nelle riunioni organizzate a intervalli regolari dal matematico Karl Menger (anche lui molto attivo nel Circolo di Vienna). Molti dei suoi risultati più interessanti risalenti a quel periodo – alcuni di notevole valore – furono pubblicati, sotto forma di brevi articoli, negli atti di questi incontri di Menger.[31] Gödel tenne il suo primo corso da libero docente nell'estate del 1933, in condizioni difficili: a causa delle violenze naziste, si rese necessario chiudere temporaneamente l'università, e in varie parti di Vienna vi furono attentati a opera dei terroristi di destra.

La proposta di trascorrere l'anno accademico 1933-1934 nel nuovissimo Institute for Advanced Study di Princeton non era di quelle che Gödel potesse facilmente rifiutare; non solo aveva l'occasione di sottrarsi alla follia politica del suo Paese, ma avrebbe avuto come colleghi stelle di prima grandezza come Albert Einstein e John von Neumann. Tuttavia, dinanzi alla prospettiva di restare per mesi e mesi lontano dalla famiglia, dagli amici – e soprattutto, verosimilmente, dalla fidanzata –, il timido e ipocondriaco Kurt fu preso dall'ansia, tanto che dopo essersi messo in viaggio per andare a imbarcarsi sulla nave che doveva portarlo nel Nuovo Mondo, si persuase di essere malato e tornò indietro. Solo le insistenze dei familiari lo convinsero a prendere un'altra nave e a partire.

Sappiamo ben poco sulla permanenza di Gödel a Princeton. Esistono gli appunti manoscritti di una conferenza che tenne a Cambridge nel Massachusetts in dicembre e di un corso che tenne a Princeton in primavera, ma non abbiamo nessuna notizia della sua vita personale. Sappiamo invece che pochi mesi dopo il suo ritorno in Austria ebbe un collasso nervoso e trascorse un certo tempo nel Sanatorium Purkersdorf, vicino a Vienna, «un posto per gente agiata, un po' bagno termale un po' clinica e un po' casa di riposo», dove fu visitato dallo psichiatra Julius Wagner-Jauregg, premio Nobel per la medicina.[32] Gödel era tornato in un'Austria devastata da eventi atroci: a fine luglio, precisamente il giorno dopo ch'era morto Hans Hahn, il relatore della tesi, per le complicazioni seguite all'asportazione di un tumore, i nazisti tentarono di prendere il potere e assassinarono il cancelliere Dollfuss. All'università le cose andavano di male in peggio: al personale amministrativo era stato imposto di iscriversi al Fronte patriottico, e molti professori considerati di sinistra e perfino alcuni studiosi ebrei apolitici vennero licenziati. Non sappiamo però fino a che punto questi eventi abbiano influito sul crollo nervoso di Gödel.

Col senno di poi è facile vedere la minaccia del fascismo avanzante; ma per quelli che se avessero avuto il dono della preveggenza sarebbero sicuramente fuggiti le cose non erano così semplici: si poteva sempre sperare che tutto si aggiustasse. Nella famiglia Gödel, scrive il fratello Rudolf, «non ci si interessava molto di politica»; per cui nessuno aveva afferrato il significato dell'ascesa al potere di Hitler in Germania nel 1933. Tuttavia, «ben presto due eventi ci aprirono gli occhi: l'assassinio del cancelliere Dollfuss e quello (da parte di uno studente nazionalsocialista) del professor Schlick, un filosofo della cui cerchia faceva parte anche mio fratello».[33]

Pur tenendosi in contatto con Princeton in vista di possibilità future, Gödel continuava a pensare a una carriera accademica a Vienna, e nel maggio 1935 iniziò il suo secondo ciclo di lezioni. Nel settembre dello stesso anno partì per Princeton, di nuovo come professore temporaneo, ma stavolta non rimase in America a lungo: prostrato da una profonda depressione, rinunciò alla borsa e tornò in patria ai primi di dicembre. In seguito avrebbe confessato che l'anno 1936 – quello dell'assassinio di Schlick – era stato il peggiore della sua vita. Le sue condizioni mentali continuavano a essere precarie e passò lunghi periodi in varie case di cura. Ma il 1937 segnò un forte miglioramento e in giugno, mentre teneva un corso di teoria degli insiemi, Kurt riuscì a fare un progresso decisivo a proposito dell'ipotesi cantoriana del continuo, il primo problema del famoso elenco di Hilbert nel 1900 (ne riparleremo più avanti).

Nel marzo del 1938 Hitler invase l'Austria, annettendola alla Germania nazista; nell'ottobre Gödel partì per l'America per la terza volta, lasciando sola la moglie dopo appena due settimane di matrimonio.[34] Stavolta la sua visita fu molto fruttuosa: dopo avere trascorso il semestre autunnale a Princeton, dove tenne un corso sulle sue nuove scoperte intorno all'ipotesi del continuo di Cantor, nel semestre primaverile accettò un incarico di insegnamento all'Università di Notre Dame, nell'Indiana, dove si era sistemato il suo vecchio collega Karl Menger, fuggito da Vienna. Ma a fine giugno del 1939, due mesi prima dell'invasione tedesca della Polonia che avrebbe scatenato la seconda guerra mondiale, tornò a casa da Adele.

A Vienna, ormai parte integrante del Reich, tutto veniva sistematicamente cambiato in conformità al «nuovo ordine» hitleriano. All'università la figura del *Dozent* era stata abolita e al suo posto c'era il *Dozent neuer Ordnung*, che percepiva un modesto stipendio. Per candidarsi, tuttavia, bisognava essere ariani e politicamente allineati con l'ideologia nazionalsocialista. In settembre Gödel presentò la sua richiesta, ma, con sua grande sorpresa e indignazione, essa venne respinta. Nel suo rapporto al preside della facoltà, il burocrate che esaminava le candidature scrisse che aveva lavorato «col professor Hahn, ebreo» e frequentato «ambienti ebraico-liberali»; non risultava però che avesse mai detto qualcosa «contro il nazionalsocialismo». In questa situazione era impossibile tanto accettare la sua domanda quanto respingerla:[35] una proposizione indecidibile!

Un altro brutto colpo fu la chiamata, dopo mesi di rinvio, a una visita medica che doveva accertare la sua idoneità militare: fu dichiarato – di nuovo con sua sorpresa – idoneo al servizio in guarnigione. Intanto, a novembre, lui e Adele avevano trovato il tempo di trasferirsi dal loro appartamento in affitto nei sobborghi a uno in centro che avevano comprato.[36] L'evidente non-percezione di Gödel di quello che accadeva intorno a lui può essere descritta solo come negazione patologica. Su questo esiste un interessante aneddoto dovuto a Gustav Bergmann, ebreo e membro del Circolo di Vienna – uno degli innumerevoli profughi di origine ebraica che sbarcavano negli Stati Uniti. Nell'ottobre del 1938 Bergmann, poco dopo il suo arrivo a Princeton, fu invitato a colazione da Gödel e si sentì chiedere, con suo enorme stupore: «E che cos'è a portarla in America, Herr Bergmann?».[37] A quanto pare, a far aprire gli occhi a Kurt sulla sua precaria situazione fu il fatto di essere incappato, poco dopo il trasloco, in una banda di picchiatori che lo presero a pugni e gli ruppero gli occhiali.[38]

Dopo la rapida conquista tedesca della Polonia, nell'inverno del 1939-1940 cominciò la *drôle de guerre*. L'avanzata tedesca verso occidente e la sconfitta della Francia sarebbero venute molti mesi dopo; l'attacco alla Russia solo nel giugno 1941 (la Germania aveva addirittura firmato un patto di non aggressione con l'Unione Sovietica, e la Russia di Stalin stava fornendo ai tedeschi prodotti di interesse militare). Nel dicembre del 1939 Gödel decise finalmente di tentare il tutto per tutto pur di lasciare l'Europa; ma per riuscirci doveva ottenere un visto d'uscita per sé e uno per Adele dalle autorità tedesche più due visti d'entrata da quelle americane, e non era facile procurarsi né i primi né i secondi. L'eroe di questa impresa fu Frank Aydelotte, nuovo direttore dell'Institute for Advanced Study di Princeton, che perorando la causa di Gödel presso il Dipartimento di Stato non esitò ad abbellire la verità. Nelle sue lettere, nel riferirsi a Gödel lo chiamava sempre «il Professore», pur sapendo che non lo era, e quando gli chiesero che cosa avrebbe insegnato a Princeton rispose, mentendo con la massima disinvoltura, che «le responsabilità del Professor Gödel» avrebbero comportato l'insegnamento, ma a un livello molto avanzato, e perciò informale. Aydelotte scrisse inoltre all'ambasciata tedesca a Washington battendo sul fatto che Gödel era «ariano» e uno dei più grandi matematici del mondo. Era il sistema giusto: finalmente i documenti richiesti arrivarono, i Gödel potevano partire. Ma poiché era considerato pericoloso attraversare l'Atlantico, presero la via più lunga: la Siberia, poi il Giappone, quindi la traversata del Pacifico, e finalmente in treno fino a Princeton, dove arrivarono a metà marzo.[39]

Uno dei primi ad andare a salutare Kurt fu Oskar Morgenstern, che sarebbe diventato uno dei suoi migliori amici. I due si erano conosciuti per puro caso al Circolo di Vienna; Morgenstern, un economista, aveva accettato una cattedra a Princeton quando aveva perso il posto in Austria. Gli chiese subito come andassero le cose a Vienna, ma rimase di stucco quando Gödel rispose: «Il caffè è pessimo».[40]

IL MOTTO DI HILBERT

Il primo dei problemi elencati da Hilbert nel suo discorso del 1900 riguardava l'ipotesi del continuo, cioè l'affermazione che gli insiemi infiniti di numeri reali hanno soltanto due misure, una grande e una piccola. Gli insiemi di misura piccola sono esattamente grandi quanto l'insieme dei numeri naturali, e ciò significa che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con $\{1,2,3,\ldots\}$; gli insiemi grandi sono quelli che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutti i numeri reali. L'ipotesi del continuo dice che ogni insieme infinito di numeri reali deve essere o del primo o del secondo tipo, e che quindi non c'è alcun insieme di grandezza intermedia. (Nel linguaggio della teoria cantoriana dei numeri transfiniti questa asserzione suona così: *il numero cardinale di ogni insieme infinito di numeri reali è o* $\aleph_0$ *o* $\mathcal{C}$). Nel suo discorso parigino Hilbert aveva definito l'ipotesi del continuo «molto plausibile», aggiungendo tuttavia che «nonostante gli sforzi più strenui, nessuno è riuscito a dimostrarla»;[41] venticinque anni dopo era tornato sull'argomento dichiarando di poterla dimostrare per mezzo della sua metamatematica, ma ciò si rivelò un'illusione. Nel 1934 venne pubblicato un trattato del matematico polacco Wacław Sierpiński, interamente dedicato a proposizioni che si sapevano essere equivalenti, o comunque correlate, all'ipotesi del continuo; ma nonostante gli «sforzi strenui» proseguissero, la questione della verità o falsità dell'ipotesi rimaneva ancora in sospeso.

Gödel finì per convincersi che l'ipotesi del continuo era indecidibile a partire dai sistemi formali allora posti a fondamento della matematica, sistemi comprendenti, oltre a PM di Whitehead e Russell, diverse assiomatizzazioni della teoria degli insiemi. Riuscì però a giustificare tale convinzione solo a metà: per l'esattezza, nel 1937 dimostrò che in questi sistemi era impossibile *confutare* l'ipotesi del continuo,[11] ma pur essendo persuaso che sarebbe risultato del pari impossibile dimostrarla, non riuscì mai a provare che le cose stavano in questi termini. (Fu però vendicato un quarto di secolo dopo, quando Paul Cohen sviluppò un metodo nuovo e potente col quale riuscì a dimostrare che nei sistemi «classici» l'ipotesi del continuo era effettivamente indecidibile).

Ma nel discorso parigino del 1900 sia in quello di addio del 1930 Hilbert aveva proclamato la propria fede nella risolubilità di ogni problema matematico: la persistente incapacità degli specialisti di venire a capo dell'ipotesi del continuo stava forse a significare che si era sbagliato? Gödel sapeva che le proposizioni indecidibili sui numeri naturali da lui scoperte erano tali *all'interno* di certi sistemi formali, ma considerate dall'esterno erano, come si è visto, chiaramente vere; ma l'ipotesi del continuo era un'altra cosa, e il suo lavoro non gli forniva indizi per capire se fosse vera o falsa. E Gödel, che non si era mai lasciato intrappolare nelle strettoie dei metodi «leciti» nell'ambito dei fondamenti e aveva saputo farsi strada usando tutti i metodi che gli servivano, ora era costretto dai suoi stessi risultati a fermarsi e a riflettere sulle implicazioni filosofiche del proprio operato.

In un sistema formale come PM è possibile definire quei numeri reali singoli e specifici dei quali si occupano normalmente i matematici, come π e $\sqrt{2}$; ma già all'epoca di Cantor si sapeva che il numero cardinale dell'insieme di tutte le definizioni possibili in un tale sistema è solo $\aleph_0$, mentre quello dell'insieme di tutti i numeri reali è C, ossia un numero più grande. Di conseguenza i numeri reali sono in maggioranza indefinibili, e la cosa è abbastanza sconcertante. Come si fa a contare cose che non si possono definire? E ha senso parlare di insiemi di numeri reali quando alcuni elementi di tali insiemi sono indefinibili? Forse l'indecidibilità dell'ipotesi del continuo, congetturata da Gödel e dimostrata molto tempo dopo da Paul Cohen, segnala proprio l'assenza di un significato chiaro, ovvero un'intrinseca vaghezza. Ma occuparsi di questo problema significa trovarsi faccia a faccia con la terribile questione del ruolo dell'infinito attuale in matematica – quella che, secondo Frege, era destinata a portare a una «battaglia grandiosa e decisiva».[43]

Gli appunti delle lezioni sull'ipotesi del continuo tenute poco dopo avere ottenuto i suoi risultati ci mostrano un Gödel che non ha idee precise in proposito e arriva a congetturare che l'ipotesi possa rivelarsi «assolutamente indecidibile», dimostrando che Hilbert si era sbagliato a credere risolubile ogni problema matematico.

Negli anni Quaranta Gödel si indirizzò a studi filosofici, sicuramente anche per fare in qualche modo i conti con le proprie idee sugli insiemi infiniti. Ammirava soprattutto Leibniz, l'autore classico col quale avvertiva la maggiore affinità.

I membri dell'Institute for Advanced Study non avevano l'obbligo di far lezione o seguire gli studenti e nemmeno quello di pubblicare, e Gödel reagì a questa atmosfera così rilassata tenendo lezioni o conferenze, oppure pubblicando articoli, solo in risposta a inviti precisi. Buona parte di questi inviti vennero dai curatori della Library of Living Philosophers, una collana di volumi dedicati ciascuno a un filosofo ancora in vita. Ogni volume consisteva in una raccolta di saggi di vari autori sulle idee del filosofo in questione, seguiti dalla replica dell'interessato. Gödel ricevette l'invito a contribuire ai volumi su Russell, Einstein e Carnap. Nel volume su Russell, uscito nel 1944, c'era un suo saggio alquanto provocatorio in cui, dopo un'incisiva discussione della logica matematica russelliana, si proclamava che insiemi e concetti potevano essere «concepiti come oggetti reali ... esistenti indipendentemente dalle nostre definizioni e costruzioni ... Assumere tali oggetti» continuava lo scritto «è altrettanto legittimo che postulare oggetti fisici, e c'è altrettanta ragione di credere nella loro esistenza». Con tanti saluti alla vaghezza! Tre anni dopo, in un articolo divulgativo intorno all'ipotesi del continuo, Gödel ribadiva di credere nell'effettiva esistenza degli insiemi, sottolineava l'incompletezza – e l'estensibilità – dei sistemi fondazionali esistenti e prefigurava la scoperta di nuovi assiomi che avrebbero finalmente resa possibile la soluzione definitiva dell'ipotesi del continuo, più esattamente, la dimostrazione della sua *falsità*.[14]

Prima del lavoro sull'ipotesi del continuo, Gödel, nel trattare questioni filosofiche, era solito ignorare quegli scrupoli che impedivano ad altri di vedere cose che per lui erano chiare; ma ora si stava addentrando in acque filosofiche profonde. Che cosa sono i numeri? Sono soltanto una costruzione umana o hanno una qualche esistenza oggettiva? 2 + 2 = 4 era già vero prima che sulla Terra vi fossero degli esseri umani ad affermarlo? Sono secoli che si discutono questi problemi; la tesi che gli oggetti astratti (come i numeri o gli insiemi di numeri) hanno un'esistenza oggettiva e proprietà che gli esseri umani possono solo scoprire ma non inventare è generalmente attribuita a Platone, e viene appunto chiamata «platonismo». L'adesione di Gödel a questa dottrina segnò un'evoluzione nelle sue concezioni. In una conferenza tenuta a Cambridge (Massachusetts) nel 1933 egli aveva affermato infatti che il platonismo non poteva «soddisfare una mente critica».[45] Negli ultimi decenni del Novecento gli studiosi di teoria degli insiemi seguirono la sua raccomandazione di cercare nuovi assiomi, ma nonostante siano stati ottenuti risultati interessanti, l'ipotesi del continuo resta irrisolta.

Il passo più stupefacente del contributo di Gödel al volume su Russell riguardava il progetto che più stava a cuore a Leibniz, quello della *characteristica universalis*. A più di duecento anni dalla morte di Leibniz, Gödel sperava ancora che un simile linguaggio potesse essere inventato e che avrebbe rivoluzionato la pratica matematica: «Ma non è necessario rinunciare alla speranza. Nei suoi scritti sulla *characteristica universalis* Leibniz non parla di un progetto utopico, e se dobbiamo credere alle sue parole era già molto avanti nello sviluppo di questo calcolo del ragionamento, ma aspettava che il seme cadesse in un terreno fertile per pubblicarlo. Era arrivato addirittura a stimare il tempo necessario perché un piccolo numero di scienziati di alto livello portasse il suo calcolo a un punto tale "che l'umanità possieda un nuovo tipo di strumento che accrescerà i poteri della ragione molto più di quanto un qualsiasi strumento ottico abbia mai aiutato quello della vista". Valutava un tale tempo in cinque anni, e affermava che il suo metodo non era per nulla più difficile da imparare della matematica o della filosofia del suo tempo».[46]

Come si è visto, quello che Leibniz riuscì a produrre nel calcolo del ragionamento, benché stupefacente per la sua epoca, era poca cosa in confronto a quello che fecero in seguito Boole e Frege. Ma che ne pensava Gödel? Sembra purtroppo che credesse nell'esistenza di una cospirazione per sopprimere le idee di Leibniz. Su molti argomenti aveva convinzioni veramente strane, che sfioravano la paranoia in senso clinico; ma fra i logici il suo prestigio è talmente grande che molti esitano a respingere *sic et simpliciter* una qualsiasi delle sue idee (dirò ancora qualcosa sui suoi problemi mentali più avanti).

Richiesto di un contributo per il volume su Einstein (nella Library of Living Philosophers), scelse invece come argomento la relazione tra relatività einsteiniana e filosofia kantiana e scoprì che le equazioni della relatività generale (la teoria einsteiniana della gravitazione) ammettevano una soluzione molto diversa da quelle immaginate dai fisici. La cosa notevole è che questa soluzione rappresenta un universo in cui viaggiando abbastanza a lungo e velocemente si può finire nel passato. Naturalmente un mondo di questo tipo è esposto a paradossi che i lettori di fantascienza conoscono bene: per esempio, è possibile viaggiare nel passato e uccidere il nonno da piccolo? La risposta di Gödel, incredibilmente non filosofica, è che un viaggio del genere non sarebbe assolutamente pratico, se non altro per la quantità di combustibile necessaria.

Per Gödel era normale rivedere meticolosamente più volte i suoi articoli e non mandarli in stampa finché non ne fosse completamente soddisfatto; anche dopo la pubblicazione approfittava delle ristampe per introdurre ulteriori correzioni. Per le case editrici, che vedevano allontanarsi la data di consegna, tutto ciò era esasperante. Addirittura, il volume su Carnap, per il quale Gödel si era impegnato a scrivere un saggio, finì per uscire senza il suo contributo; eppure fra le sue carte furono trovate, dopo la morte, sei versioni diverse della sua critica alle idee di Carnap sulla logica e la matematica, e i curatori dei *Collected Works* decisero di pubblicarne due. Un altro inedito scoperto fra le sue carte è il testo manoscritto (pieno di inserti, cancellazioni e note a piè di pagina) di una conferenza intitolata «Some Basic Theorems on the Foundation of Mathematics and Their Implications» da lui tenuta a Providence la settimana di Natale del 1951,[47] in cui il motto di Hilbert sulla risolubilità di ogni problema matematico viene messo in rapporto con la natura della mente umana. Gödel si chiede se la nostra mente non sia, nei suoi aspetti essenziali, equivalente a un calcolatore (questione ancora oggi vivacemente dibattuta in rapporto all'intelligenza artificiale e alle sue prospettive), e pur senza cercare di rispondere (ma alla fine si capisce che per lui la risposta giusta è negativa) sostiene che entrambe le risposte, affermativa e negativa, sono «decisamente contrarie alla filosofia materialistica». Se un apparato meccanico finito può emulare la mente umana in tutta la sua potenza, allora è possibile utilizzare il teorema di incompletezza dello stesso Gödel per mostrare che una certa proposizione sui numeri naturali, pur essendo vera, non potrà mai essere provata dagli esseri umani, che essa è cioè una proposizione assolutamente indecidibile. Questo è in evidente contraddizione col motto di Hilbert; ma secondo Gödel ci vuole una certa dose di idealismo filosofico anche solo per dare senso a un'asserzione che presuppone l'esistenza oggettiva di numeri naturali con proprietà che vanno al di là di quelle verificabili dagli esseri umani. E se invece – prosegue Gödel – la mente umana non è riducibile a un meccanismo mentre lo è (cosa per lui evidente) il nostro cervello, allora ne segue che la mente trascende la realtà fisica, e anche questo è incompatibile col materialismo. Ora, il punto non è se questo argomento sia completamente persuasivo; è che mettendo insieme la logica teorica, la fisiologia umana, le potenzialità ultime dei calcolatori e i fondamenti della filosofia Gödel aveva mostrato, ancora una volta, una stupefacente capacità di pensare in direzioni radicalmente nuove e impreviste.[48]

Ormai vicino alla pensione, Gödel sperava che il suo posto all'Institute for Advanced Study fosse preso dal logico Abraham Robinson, che all'epoca era a Yale; ma prima che la cosa potesse andare in porto a Robinson venne diagnosticato un cancro non operabile al pancreas. Gli restavano pochi mesi da vivere, e fu allora che ricevette la seguente lettera di Gödel:

«Dopo quello che ci siamo detti [sulla venuta di Robinson a Princeton] nel nostro colloquio dell'anno scorso, lei può immaginare quanto mi addolori la sua malattia, non solo da un punto di vista personale ma anche per quanto riguarda la logica e l'Institute for Advanced Study.

«Come lei sa, io ho idee non ortodosse su molte cose. Qui sono pertinenti due di queste idee:

«1. Io non credo che esista una diagnosi medica sicura al 100%.

«2. L'affermazione che il nostro io consiste di molecole proteiche mi sembra una delle più ridicole che siano mai state fatte.

«Spero che lei condivida con me almeno la seconda opinione. Mi fa piacere sentire che nonostante la malattia lei è ancora in grado di passare una parte del suo tempo nel dipartimento di matematica e sono certo che questo le assicurerà una gradita diversione».[49]

Nella lettera c'è la quintessenza di Gödel. L'accenno alla sua mancanza di fiducia nelle diagnosi mediche è certamente un eufemismo: quando ebbe un blocco urinario dovuto all'ingrossamento della prostata non solo rifiutò di prendere buona la diagnosi ma sostenne cocciutamente che il problema si poteva risolvere aumentando la dose del lassativo dal quale già dipendeva pesantemente; a un certo punto, in un accesso di rabbia, si strappò addirittura il catetere che gli era stato applicato (ma poiché rifiutava l'operazione che di solito dà sollievo a questo disturbo finì per accettarlo, e l'usò per tutto il resto della vita). Anche il tentativo di consolare Robinson con un cenno indiretto alla sua convinzione che la mente non fosse riducibile a molecole proteiche (il che suggerisce, chiaramente, l'esistenza di una vita dopo la morte) è tipicamente suo.

Il confine fra le idee non ortodosse di Gödel e la pura e semplice paranoia non era sempre netto. Morgenstern ricorda di avere scoperto con stupore che prendeva sul serio l'esistenza dei fantasmi; ma – cosa molto più importante – era anche convinto che il frigorifero e il termosifone (in tutte le sue abitazioni a Princeton) emettessero gas nocivi. Così lui e Adele traslocarono diverse volte, finché il problema venne risolto togliendo di mezzo gli strumenti del male; e il loro appartamento divenne «un posto abbastanza scomodo d'inverno».

Quando Gödel fece domanda per la cittadinanza degli Stati Uniti, si preparò a sostenere, dinanzi al giudice, l'esame di rito sulle istituzioni americane, ma lo fece a modo suo, sottoponendo la Costituzione a quell'analisi meticolosa di cui egli solo era capace; alla fine concluse che in realtà essa era contraddittoria, e la cosa lo rese estremamente nervoso. Mentre si recavano in auto a Trenton, la capitale dello Stato del New Jersey, per il colloquio, Einstein e Morgenstern, che dovevano fargli da testimoni, cercarono di distrarlo perché temevano guai, se fosse stato toccato un tale argomento. Einstein era una miniera di barzellette. Senonché, quando il giudice gli chiese se anche negli Stati Uniti sarebbe mai stata possibile una dittatura come quella tedesca, il candidato rispose affermativamente, lanciandosi nella spiegazione di ciò che aveva scoperto. Per fortuna l'esaminatore capì subito con che tipo di persona aveva a che fare, lo interruppe e tutto finì bene.

È facile sorridere delle stranezze di Gödel, ma non sempre si trattò di cose divertenti. Assillato dal sospetto paranoico che tutti cercassero di avvelenarlo, e con la moglie sempre devota, ma lei stessa troppo ammalata per aiutarlo, si ridusse progressivamente alla fame, fino a morirne. Così terminò, il 14 gennaio 1978, la vita di una delle più grandi menti del ventesimo secolo.

VII
TURING E L'IDEA DEL CALCOLATORE GENERALE

Charles Babbage aveva avuto l'idea di una macchina calcolatrice automatica – la vagheggiata, e mai costruita, macchina analitica, destinata a eseguire calcoli numerici dei tipi più diversi – già nel 1834.[1] Per sottolinearne la potenza e versatilità sole va dire che «sapeva fare di tutto, tranne comporre danze popolari».[2] Se per Babbage era assurdo aspettarsi che una macchina progettata per fare calcoli fosse capace di simili prestazioni, oggi una cosa del genere non è del tutto impensabile. Gli odierni calcolatori possono senz'altro venir programmati per comporre danze popolari (sia pure, verosimilmente, di qualità non eccelsa), e chi volesse trovare un'altra metafora per mettere in rilievo la potenza e versatilità dei nostri calcolatori si troverebbe in difficoltà. Praticamente, non c'è compito che coinvolga simboli, numeri o testi che non sia già alla portata dei calcolatori o che qualche esperto non giuri che lo sarà tra breve. Il concetto stesso di calcolo è drasticamente mutato; a porre le basi della nuova concezione fu Alan Turing nel 1935, mentre cercava di risolvere un problema di logica matematica sollevato da David Hilbert.

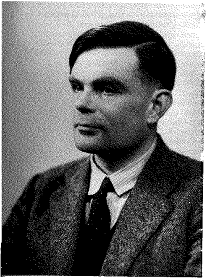
Babbage intendeva costruire una macchina usando solo componenti meccaniche (per esempio ingranaggi), ma data la complessità del congegno non sorprende che non vi sia riuscito. Solo negli anni Trenta, con l'avvento di calcolatori elettromeccanici che utilizzavano circuiti elettrici, si cominciarono a costruire macchine con la versatilità che avrebbe desiderato Babbage. Tuttavia, prima degli anni Cinquanta nessuno degli addetti ai lavori pensava a strumenti che andassero oltre il puro e semplice calcolo matematico. Il primo a resuscitare la visione di Babbage fu, come vedremo, Howard Aiken, il quale scrisse: «Se risultasse che le logiche di base di una macchina progettata per la soluzione numerica di equazioni differenziali coincidono con quelle di una macchina destinata a preparare le fatture di un grande magazzino, penserei che si tratta della più stupefacente coincidenza di tutta la mia vita».[3]

Aiken fece questa impegnativa affermazione nel 1956, quando erano già in vendita calcolatori che potevano essere programmati per fare entrambe le cose. Se avesse afferrato l'importanza dell'articolo pubblicato vent'anni prima da Turing, non avrebbe mai detto una cosa tanto azzardata.

UN FIGLIO DELL'IMPERO

Julius Turing, padre di Alan, aveva fatto una brillante carriera come pubblico funzionario in India; nella primavera del 1907, dopo oltre dieci anni di servizio, era ormai pronto per prendersi una licenza e partì per l'Inghilterra. Sulla nave che doveva riportarlo in patria (lungo la rotta del Pacifico) conobbe la futura moglie, Ethel Sara Stoney, e i genitori di lei. Nata a Madras, educata in Irlanda ma un po' anche a Parigi, Ethel era tornata a vivere con i suoi in India. Fu l'inizio di una storia romantica che si sviluppò rapidamente; i due fecero il viaggio attraverso gli Stati Uniti insieme, con una sosta per visitare il parco di Yellowstone. Si sposarono a Dublino in autunno, col consenso del padre di lei, prima di tornare in India in gennaio. Nel settembre del 1908 nacque il loro primo figlio, John. Il lavoro portava Julius a compiere frequenti viaggi nell'India del Sud, e Ethel e il piccolo lo accompagnavano spesso; Alan fu concepito nell'autunno del 1911, durante una di queste trasferte, e quando Julius riuscì a ottenere un'altra licenza la famiglia partì tutta insieme per l'Inghilterra. Alan Mathison Turing nacque a Londra il 23 giugno 1912.[4]

La spietata logica dell'impero faceva sì che per i Turing fosse un'impresa difficile vivere insieme. La carriera tratteneva il padre in India, dove bambini in così tenera età erano gravemente a rischio per via delle malattie tropicali e non c'era la possibilità di dar loro un'istruzione adeguata. Così Ethel dovette scegliere se stare accanto al marito o con i figli; fare entrambe le cose insieme era impossibile, tranne quando Julius era in licenza. Alan aveva appena quindici mesi quando la madre lo sistemò in Inghilterra, presso la moglie di un colonnello in pensione, insieme al fratello di quattro anni, e tornò in India. Nel 1915 la signora Turing riuscì in verità a passare qualche mese con i bambini, e nella primavera dell'anno successivo entrambi i genitori fecero ritorno in patria. Ma questa volta era in agguato un altro pericolo, gli U-Boot tedeschi, e così Julius rientrò in India da solo; la guerra, con tutte le sue crudeltà, si risolse in un bene per Alan, che ebbe la possibilità di avere accanto la madre. Il bambino era precoce, allegro, faceva subito amicizia, ma era anche goffo e disordinato, e Ethel lo tenne con sé an-



Alan Turing (Elliot & Fry. Per gentile concessione della National Portrait Gallery di Londra) che dopo che ebbe compiuto i sei anni, età in cui i figli maschi venivano spediti molto spesso in collegio. Di giorno lo mandava a lezione di latino, considerato indispensabile per una persona istruita; e non era facile, col pennino che grattava la carta, la stilografica che perdeva inchiostro e la disastrosa incapacità del bambino di tenere una penna in mano.

Nel 1919, quando la madre ripartì per l'India, Alan, che allora aveva sette anni, fu rimesso a pensione dal colonnello; ma dopo un'assenza di quasi due anni la signora Turing, al suo ritorno, scoprì che il figlio aveva molti problemi. Aveva lasciato un ragazzino aperto, socievole, e se lo ritrovava chiuso, introverso, e con gravi carenze nella preparazione scolastica; fece quello che poteva per colmare le sue lacune e poi lo mandò nel piccolo collegio dove già studiava il fratello John. I due ragazzi rimasero insieme solo pochi mesi, dopodiché John fu iscritto a una *public school*;[5] finite le vacanze estive, Alan si ritrovò da solo, a cavarsela come poteva con la vita in collegio. Il bambino manifestò chiaramente il suo stato d'animo rincorrendo disperatamente il taxi che portava via i genitori.

All'età di quattordici anni Alan cominciò a frequentare la *public school* di Sherborne; le sue inclinazioni per la scienza e la matematica erano già ben delineate, ma si trovò in un ambiente che esaltava l'agonismo sportivo, mentre lo studio della matematica era apertamente dileggiato. Uno dei suoi insegnanti definiva le materie scientifiche «artifici di bassa lega» e fiutando l'aria esclamava: «Quest'aula puzza di matematica!».[6] Al ragazzo veniva riconosciuto un talento matematico non comune, ma la cosa non veniva granché apprezzata, e i genitori furono avvertiti che Alan rischiava di diventare nulla più che uno specialista della scienza. E poi c'erano quei quaderni sporchi, pieni di macchie, scritti in una grafia illeggibile! Intanto Turing, che se ne stava in disparte e seguiva distrattamente le lezioni (ma agli esami se la cavava benino), faceva ricerche matematiche per proprio conto e studiava la teoria della relatività di Einstein.

La sua vita cambiò quando trovò un amico – e anche qualcosa di più di un amico – in Christopher Morcom. Chris condivideva la sua passione per la scienza e la matematica, ma era anche uno studente modello che prendeva sul serio tutte le materie e faceva compiti scritti impeccabili; e Alan, che aveva per lui un'ammirazione sconfinata, decise che doveva assomigliargli di più. Non è chiaro a che punto della sua vita Alan Turing abbia preso coscienza della propria omosessualità, ma è verosimile che l'amicizia con Morcom avesse, almeno per lui, una sfumatura erotica. Il suo biografo Andrew Hodges parla di «primo amore», e l'intensità era sicuramente quella. D'altronde non possiamo sapere come si sarebbe sviluppata la relazione fra i due, né come avrebbe indirizzato i sentimenti di Alan, se un tragico evento non vi avesse messo fine. Da tempo malato di tubercolosi, cosa di cui l'amico era all'oscuro, Christopher morì nel febbraio del 1930, ma in Turing sopravvisse per sempre come un simbolo di perfezione.[7]

Nell'ultimo anno a Sherborne, Alan prese ottimi voti e vinse una borsa per il King's College di Cambridge: aveva diritto a vitto, alloggio e una somma di ottanta sterline all'anno, circa la metà di quello che poteva arrivare a guadagnare un operaio qualificato.[8] Mentre a Sherborne la matematica era screditata, a Cambridge Turing trovò un'atmosfera nella quale il suo talento poteva fiorire liberamente. Vi lavorava un grande come G.H. Hardy (1877-1947), il cui *Course of Pure Mathematics*, pubblicato nel 1908 e ristampato ancora oggi, era già un classico sul quale generazioni di studenti avevano affrontato le proprietà fondamentali dei passaggi al limite; di Hardy parlò anche un programma televisivo (andato in onda per la prima volta nel 1988) dedicato a Ramanujan, l'impiegato autodidatta delle poste di Madras il cui genio matematico era stato scoperto e valorizzato proprio da lui. Oltre alle lezioni di Hardy, Turing ebbe modo di frequentare quelle del fisico matematico e astronomo Sir Arthur Eddington, l'uomo che nel 1919 aveva guidato la spedizione in Africa occidentale nel corso della quale un'eclisse totale di Sole aveva reso possibile osservare la deflessione della luce di una stella a opera dell'attrazione gravitazionale solare, prima conferma della teoria einsteiniana della relatività generale. Nel corso Eddington affrontava il problema delle rilevazioni statistiche: come mai i dati si allineavano tanto spesso lungo la famosa curva a campana che porta il nome di distribuzione normale? Tra gli argomenti vi era pure la meccanica quantistica, la nuovissima teoria che stava rivoluzionando la fisica, ma qui l'attenzione di Turing era attratta soprattutto da un recente libro di John von Neumann (avuto in premio a Sherborne) sui fondamenti matematici della teoria stessa.

L'onnipresenza della distribuzione normale sottolineata da Eddington affascinava Turing, che ne cercò una spiegazione matematica più profonda; e la trovò, riuscendo a dimostrare che un insieme molto vasto ed eterogeneo di distribuzioni statistiche tende effettivamente, al limite, a quella normale: applicazione per eccellenza dei metodi di passaggio al limite del calcolo infinitesimale. Alan Turing non aveva fatto altro che riscoprire un risultato ben noto, il teorema del limite centrale; ma il suo exploit fece talmente colpo che gli venne offerto un posto di *fellow* al King's College. Ora Turing era *don*[9] dell'Università di Cambridge, con uno stipendio annuo di trecento sterline, una nomina triennale e la quasi certezza di un rinnovo per altri tre anni. La sua posizione, che non comportava doveri precisi, gli consentiva di cenare alla «tavola alta», da dove poteva guardare letteralmente dall'alto in basso gli studenti dei primi anni – quegli stessi a cui, se voleva, poteva far da tutore, rimpinguando così i propri guadagni. La nomina a *fellow* era il primo passo di quella si prospettava come una brillante carriera accademica,[10] e Sherborne festeggiò il successo dell'ex allievo dimenticando le battute sprezzanti sulla matematica e gli scienziati. I ragazzi ebbero mezza giornata di vacanza, e subito prese a circolare una quartina:

Turing
Must have been alluring
To get made a Don
So early on.[11]

[«Turing / dev'esser stato davvero seducente / per esser fatto *don* / così precocemente].

E Alan Turing dimostrò subito di che pasta era fatto col suo primo risultato matematico veramente nuovo, che gli permise di pubblicare un articolo; riuscì, per l'esattezza, a perfezionare un teorema ottenuto da von Neumann in un campo altamente specialistico, la cosiddetta teoria delle funzioni quasi periodiche. Ormai era un ricercatore matematico di successo, ben avviato in una carriera i cui risultati potevano interessare solo altri specialisti; ma nella primavera del 1935, sempre a Cambridge, frequentò un corso sui fondamenti della matematica, e tutto cambiò.

L'«ENTSCHEIDUNGSPROBLEM» DI HILBERT

Leibniz sognava una ragione umana ridotta a puro calcolo e a grandi macchine meccaniche che consentissero l'esecuzione dei calcoli; Frege era stato il primo a produrre un sistema di regole capace di rendere conto in modo plausibile di tutti i ragionamenti deduttivi umani; e Gödel, nella tesi di dottorato del 1930, aveva dimostrato, rispondendo a una domanda posta da Hilbert due anni prima, che le regole di Frege erano complete. Hilbert cercava anche procedure di calcolo esplicite che, date alcune premesse e una ipotetica conclusione, scritte nella notazione di quella che oggi chiamiamo logica del primo ordine, permettessero sempre di stabilire se le regole di Frege consentissero di derivare la seconda dalle prime;[12] la ricerca di queste procedure è nota come l'*Entscheidungsproblem* (letteralmente «problema della decisione») di Hilbert. Naturalmente i sistemi di procedure di calcolo destinati alla soluzione di problemi specifici non erano una novità, e anzi il programma tradizionale degli studi matematici consisteva in buona parte di queste procedure, note anche come *algoritmi*. I primi algoritmi che impariamo sono l'addizione, la moltiplicazione, la sottrazione e la divisione; poi vengono quelli che servono a manipolare le espressioni algebriche e risolvere le equazioni, e se arriviamo a studiare il calcolo infinitesimale le impariamo a usare anche quelli originariamente creati da Leibniz. Hilbert però cercava un algoritmo di un'ampiezza senza precedenti; in linea di principio l'algoritmo per l'*Entscheidungsproblem* avrebbe dovuto ridurre tutti i ragionamenti deduttivi umani a calcolo bruto, realizzando in buona misura il sogno di Leibniz.

Spesso i matematici affrontano un problema difficile da due direzioni. Da un lato fanno il possibile per risolvere casi particolari del problema generale, dall'altro, procedendo in senso inverso, cercano di ridurre il problema generale ai casi particolari. Se tutto va bene i due approcci si incontrano a metà strada, fornendo una soluzione del problema generale. Il lavoro sull'*Entscheidungsproblem* procedeva lungo queste due direttrici, e in effetti la lacuna fra quei casi particolari per i quali erano stati trovati degli algoritmi e i casi ai quali era stato ridotto il problema generale era diminuita al punto di far sperare che bastasse ormai un ultimo, piccolo passo a colmarla per intero, fornendo l'algoritmo cercato da Hilbert.[13] Fra gli scettici c'era, a Cambridge, G.H. Hardy, il quale aveva osservato, stizzosamente: «Naturalmente un teorema così non esiste, ed è una fortuna, perché se esistesse potremmo disporre di un insieme di regole meccaniche per la soluzione di tutti i problemi matematici, il che porrebbe fine alla nostra attività come matematici».[14] Hardy non era certo il primo, esperto nel proprio campo, a ritenere che un semplice meccanismo non avrebbe mai potuto rimpiazzare la sua abilità; questa volta però l'esperto aveva ragione!

Nella carriera di Turing doveva svolgere un ruolo importante e duraturo un altro *don* di Cambridge, M.H.A. (Max) Newman, *fellow* del St. John's College. Di quindici anni più vecchio di lui, Newman aveva dato contributi pionieristici a una disciplina all'epoca relativamente nuova, la topologia (che si occupa, detto molto semplicemente, di quelle proprietà che una figura geometrica conserva invariate quando viene stirata, anche moltissimo, ma non lacerata). Nel suo corso aveva fatto conoscere questa branca della matematica, allora in rigoglioso sviluppo, a molti giovani matematici, e scritto un eccellente manuale sull'argomento. Nel 1928, al Congresso internazionale dei Matematici di Bologna, aveva udito Hilbert proporre obiettivi che, appena due anni dopo, per opera di Kurt Gödel, si sarebbero rivelati irraggiungibili. Così, affascinato da queste novità, nella primavera del 1935 tenne un corso sui fondamenti della matematica che culminava col teorema di incompletezza di Gödel. Anche Turing veniva a lezione, e fu così che seppe dell'*Entscheidungsproblem* di Hilbert. Anche a prescindere dall'incredulità di uomini come Hardy, dopo Gödel era difficile pensare che potesse esistere un algoritmo come quello cercato da Hilbert; e Alan Turing cominciò a chiedersi come si *poteva dimostrare* che un algoritmo del genere non esisteva.

TURING ANALIZZA IL PROCESSO DI CALCOLO

Turing sapeva che un *algoritmo* è tipicamente definito da un elenco di regole che una *persona* può seguire in modo meccanico e preciso, come le ricette dei libri di cucina, ma spostò la sua attenzione dalle regole a quello che la persona effettivamente *faceva*, ed eliminando uno dopo l'altro i dettagli inessenziali riuscì a dimostrare che una tale persona poteva limitarsi a poche azioni di base, estremamente semplici, senza che il risultato finale del calcolo cambiasse. Poi, facendo un altro passo, comprese che l'essere umano poteva essere sostituito da una macchina capace di eseguire quelle stesse azioni di base; e infine dimostrò che nessuna macchina in grado di eseguire solo tali azioni poteva stabilire se una data conclusione era derivabile da premesse date usando le regole di Frege, e concluse che non esisteva un algoritmo per l'*Entscheidungsproblem*. E, come corollario, trovò un modello matematico di macchina calcolatrice onnifunzionale.

Per tentare di ricostruire i processi mentali di Turing, immaginiamo di assistere all'esecuzione di un calcolo. Che cosa faceva in realtà la persona (negli anni Trenta, erano soprattutto le donne) incaricata del calcolo?[15] Tracciava dei segni su un foglio, spostando la sua attenzione da quello che aveva già scritto a quello che stava scrivendo ora. Turing voleva descrivere questo processo spogliandolo dei dettagli non pertinenti. La ragazza prendeva un caffè mentre lavorava? Particolare irrilevante. Scriveva a matita o a penna? Altra cosa senza importanza. E le dimensioni dei fogli? Se sono piccoli può essere necessario guardare più spesso ai fogli già scritti; ma Turing capì immediatamente che si trattava solo di convenienza e non di necessità. Cambiava ben poco se la ragazza usava striscioline talmente strette che diventava impossibile scrivere una cifra sotto l'altra, o addirittura un nastro diviso in caselle orizzontali. Supponiamo, per restare nel semplice, che stesse eseguendo una moltiplicazione:

$$\begin{array}{r} 4231\times \\ 77 \\ \hline 29617 \\ 29617 \\ \hline 325787 \end{array}$$

Possiamo immaginare, senza che niente di essenziale vada perduto, che lavorasse con un nastro di carta diviso in quadretti:

4	2	3	1	×	7	7	=	2	9	6	1	7	+	2	9	6	1	7	0	=	3	2	5	7	8	7

Turing si rese conto che eseguire un calcolo complicato utilizzando un nastro unidimensionale poteva essere tedioso, ma non comportava nessun problema fondamentale. Ma continuiamo a osservare lo svolgimento del calcolo, che adesso si svolge tutto su una sola striscia di carta: il nostro soggetto sposta lo sguardo avanti e indietro lungo il nastro, scrive dei simboli e a volte torna indietro e ne cancella qualcuno, così da lasciare spazio ad altri simboli. Quale sarà il prossimo simbolo? La scelta dipenderà non solo dai simboli sui quali ha posato l'occhio, ma anche dal suo *stato mentale* del momento. Perfino quando si tratta di un'operazione semplicissima come una moltiplicazione, nel momento in cui nota due cifre, sarà il suo stato mentale a stabilire se moltiplicarle o sommarle. Inizialmente, il nastro si presenta così:

			⇓			⇓	
4	2	3	1	×	7	7	=

Sopra le cifre 1 e 7 c'è una freccia (⇓) per indicare che inizialmente l'attenzione della ragazza è rivolta a questi due simboli. Moltiplicandole, ottiene 7 e lo scrive sul nastro:

		⇓				⇓		
4	2	3	1	×	7	7	=	7

Ora sposta la sua attenzione sulle cifre 3 e 7, che a loro volta vengono moltiplicate. Dopo avere completato la fase del calcolo in cui moltiplica le cifre a due a due, dovrà sommare i due prodotti parziali:

												⇓							⇓	
4	2	3	1	×	7	7	=	2	9	6	1	7	+	2	9	6	1	7	0	=

Inizia questa fase sommando 7 e 0:

											⇓							⇓			
4	2	3	1	×	7	7	=	2	9	6	1	7	+	2	9	6	1	7	0	=	7

Ora deve sommare 1 e 7; otterrà 8. Si noti che le cifre considerate sono le stesse che la ragazza ha moltiplicato all'inizio del calcolo, ma il suo stato mentale è cambiato e adesso gliele fa sommare.

L'esempio appena discusso illumina alcuni aspetti cruciali di qualsiasi calcolo. Una persona che esegua un calcolo (aritmetico, algebrico, infinitesimale o di qualsiasi altro ramo della matematica) è soggetta ai seguenti vincoli:

- In ogni stadio del calcolo l'attenzione è rivolta solo a pochi simboli.
- In ogni stadio l'azione intrapresa dipende solo da quei simboli su cui si focalizza la sua attenzione e dal suo stato mentale del momento.

Quanti simboli può considerare simultaneamente una persona? E quanti sono davvero necessari per una corretta esecuzione del calcolo? La risposta alla prima domanda varia da persona a persona, ma non può mai trattarsi di un numero molto grande; la risposta alla seconda domanda è «uno», perché si ottiene lo stesso effetto se anziché considerare contemporaneamente più simboli si focalizza l'attenzione su uno solo per volta.[16] Non basta: anche l'effetto di spostare l'attenzione da una certa casella del nastro a un'altra può essere ottenuto con una successione di passi, ciascuno dei quali implica spostarsi di una casella a destra o a sinistra. In conclusione, ogni calcolo può essere inteso come un processo con le seguenti caratteristiche:

- Viene eseguito scrivendo dei simboli nelle caselle di un nastro di carta.
- A ogni passo la persona che esegue il calcolo fa attenzione al simbolo scritto in una sola di queste caselle.
- L'azione successiva dipenderà da questo simbolo e dallo stato mentale della persona.
- Tale azione consisterà nello scrivere un simbolo nella casella osservata ed eventualmente nello spostare l'attenzione sulla casella immediatamente a destra o a sinistra.

È facile vedere che la persona può essere sostituita da una macchina nella quale il nastro – che possiamo pensare come un nastro magnetico, ove i simboli scritti sono rappresentati da informazioni in codice – si muove avanti e indietro, mentre agli stati mentali dell'operatore corrispondono differenti configurazioni delle componenti interne della macchina. Quest'ultima va progettata in modo da scandire, istante per istante, uno solo dei simboli del nastro. A seconda della sua configurazione interna e del simbolo scandito, scriverà sul nastro un certo simbolo (che rimpiazzerà quello scandito), dopodiché o continuerà a scandire la stessa casella o si sposterà di un passo verso destra o verso sinistra. Ai fini del calcolo non importa come sia costruita la macchina o addirittura di che cosa sia fatta; conta solo che abbia la capacità di assumere un certo numero di *configurazioni* (dette anche *stati*) distinte e che in ognuna di esse si comporti in modo adeguato.

Il punto non è la costruzione effettiva di una di queste *macchine di Turing*, che dopotutto sono solo astrazioni matematiche;[7] ciò che importa è che questa analisi della nozione di calcolo abbia consentito di stabilire che tutto ciò che è calcolabile mediante un processo algoritmico può essere calcolato da una macchina di Turing. Se quindi si può dimostrare che un certo compito non può essere eseguito da una macchina di Turing, è certo che non esiste un processo algoritmico in grado di eseguirlo; e fu così che Turing dimostrò che non esisteva un algoritmo per l'*Entscheidungsproblem*. Oltre a ciò, Turing mostrò come creare una *singola* macchina di Turing capace di fare, senza aiuti esterni, tutto ciò che poteva essere fatto da una qualsiasi macchina di Turing: era un modello matematico di calcolatore generale.

L'analisi del processo di calcolo condotta da Turing giunge così alla conclusione che ogni calcolo può essere eseguito da uno di quegli strumenti, dalle caratteristiche rigidamente definite, che oggi chiamiamo macchine di Turing; ma forse vale la pena di esaminare qualche esempio molto semplice. Che cosa è necessario per descrivere una di queste macchine? Tanto per cominciare ci serve un elenco di tutti i suoi possibili stati; per ciascuno di essi e per ogni simbolo che possiamo trovare sul nastro è necessario inoltre specificare l'azione svolta dalla macchina quando è in quello stato e si trova davanti quel simbolo. Ricordiamo che questa azione consiste semplicemente nell'eventuale sostituzione del simbolo nella casella scandita, nello spostamento di una casella verso destra o verso sinistra e in un eventuale cambiamento di stato. Indicate con lettere maiuscole gli stati della macchina, l'enunciato:

Quando la macchina si trova nello stato **R** *e legge sul nastro il simbolo* **a**, *sostituisce* **a** *con* **b**, *si sposta di una casella a destra e passa nello stato* **S**

può venire scritto, simbolicamente, **R** : **b** → **S**. Un enunciato analogo ma che prescriva uno spostamento di una casella a sinistra sarà espresso da **R** : **b** ← **S**. Infine, un enunciato che imponga di sostituire il simbolo sul nastro senza nessuno spostamento si scriverà **R** : **b** ⋆ **S**. Espressioni di questo tipo sono comunemente chiamate *quintuple* perché occorrono cinque simboli (non contando i due punti) per specificarne una. Ogni macchina di Turing, quindi, può essere descritta da un elenco di quintuple.

Vediamo ora come costruire una macchina di Turing che verifichi se un dato numero naturale è pari o dispari. Scriveremo il numero nella solita notazione decimale, come stringa delle cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. A occhio, è facilissimo dire se un numero scritto così è pari o dispari: basta guardare l'ultima cifra a destra, e se è 1, 3, 5, 7 o 9 il numero è dispari, altrimenti è pari. La nostra macchina, tuttavia, è predisposta in modo da partire dalla prima cifra a sinistra, e poiché può occuparsi di una sola cifra alla volta e spostarsi di una sola casella per volta, non è del tutto ovvio come dovrà lavorare. Possiamo immaginare che il numero di «ingresso» sia già scritto sul nastro, così:

Q
⇓

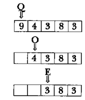
9	4	3	8	3

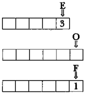
In questo caso, sul nastro è scritto il numero 94383, la macchina si trova nello stato iniziale Q e scandisce la casella più a sinistra. Qui vediamo appena cinque caselle del nastro (cioè quelle strettamente indispensabili per contenere l'ingresso), ma è essenziale che non vi siano limiti alla quantità di nastro disponibile per il calcolo; perciò se la macchina cercherà di superare l'estremità destra del nastro stesso comparirà sempre una casella vuota; tratteremo lo spazio vuoto come un carattere speciale e lo scriveremo □.

Quando la nostra macchina di Turing parte, si trova nello stato Q e scandisce la prima casella a sinistra; quando si ferma, il nastro – quale che fosse il dato d'ingresso – avrà tutte le caselle vuote meno una, e quella singola casella conterrà uno 0 se l'ingresso originale era pari e un 1 se era dispari. La macchina ha quattro stati, rappresentati dai simboli Q, E, O e F; Q, come abbiamo già detto, è lo stato iniziale. Se la macchina (qualunque sia lo stato in cui si trova) legge un numero pari, lo cancella (cioè vi stampa sopra uno spazio vuoto), si sposta a destra di una casella ed entra nello stato E; analogamente, se legge un numero dispari lo cancella, si sposta a destra ed entra nello stato O. Alla fine avrà letto e cancellato l'intero ingresso e sarà giunta a una casella vuota; a quel punto stamperà uno 0 se si trova nello stato E e un 1 se si trova nello stato O, dopodiché si sposterà a sinistra di una casella e si fermerà. Ma ecco l'insieme di quintuple che costituisce questa macchina:

Q0:□→E	Q2:□→E	Q4:□→E	Q6:□→E	Q8:□→E
Q1:□→O	Q3:□→O	Q5:□→O	Q7:□→O	Q9:□→O
E 0:□→E	E 2:□→E	E 4:□→E	E 6:□→E	E 8:□→E
E 1:□→O	E 3:□→O	E 5:□→O	E 7:□→O	E 9:□→O
O0:□→E	O2:□→E	O4:□→E	O6:□→E	O8:□→E
O1:□→O	O3:□→O	O5:□→O	O7:□→O	O9:□→O
E□: 0 ★ F	O□:1 ★ F			

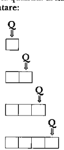
Il calcolo completo, che inizia dal nostro ingresso campione 94383, mostra il funzionamento della macchina in tutti i dettagli:



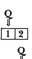


Inizialmente la macchina si trova nello stato Q e legge il numero 9. La quintupla da applicare si trova nella seconda riga dell'ultima colonna della tabella e dice di cancellare il 9, fare un passo a destra e passare nello stato O. Se la macchina è nello stato O e legge un 4, la quintupla da applicare è nella quinta riga della terza colonna; seguendo le sue istruzioni, la macchina cancella il 4, si sposta a destra ed entra nello stato E. Nel passo successivo, dato che è nello stato E e legge un 3, la quintupla nella quarta riga della seconda colonna le fa cancellare il 3, dopodiché la macchina continua a spostarsi a destra e passa nello stato O. Poiché in O legge un 8, entra in gioco la quintupla della quinta riga dell'ultima colonna: cancellare l'8, andare a destra, passare nello stato E. Così, di nuovo la macchina si trova in E e osserva un 3: quindi si deve applicare la quarta riga della seconda colonna, e la macchina cancella il 3, va a destra e passa in O. Stavolta scandisce una casella vuota: vale l'ultima riga della seconda colonna, e quindi lo spazio vuoto viene sostituito da un 1 e la macchina passa nello stato F; ma non esiste una quintupla applicabile a partire dallo stato F, per cui la macchina si ferma. Il calcolo è terminato e sul nastro c'è soltanto la cifra 1: un risultato corretto, perché il dato in ingresso era dispari.

Essendo pure astrazioni matematiche, le macchine di Turing hanno il vantaggio, rispetto alle macchine fisiche, di poter usare una quantità di nastro illimitata. Una volta avviata su un nastro vuoto, la macchina di Turing formata dalla sola quintupla Q □ : □ → Q continuerà a spostarsi a destra «per sempre», mentre la quantità di nastro percorsa continuerà ad aumentare:



È possibile che il calcolo di una macchina di Turing non abbia mai fine anche se essa percorre solo una quantità prefissata di nastro. Consideriamo ad esempio la macchina formata dalle due quintuple Q1 : 1 → Q e Q2 : 2 ← Q. Se l'ingresso è 12, essa continuerà a rimbalzare avanti e indietro così:



$$\begin{array}{l}\overset{Q}{\Downarrow}\\ \boxed{1}\boxed{2}\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\overset{Q}{\Downarrow}\\ \boxed{1}\boxed{2}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\overset{Q}{\Downarrow}\\ \boxed{1}\boxed{2}\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\overset{Q}{\Downarrow}\\ \boxed{1}\boxed{2}\end{array}$$

Il comportamento della macchina è strettamente legato ai dati di ingresso. Se, ad esempio, il dato iniziale scritto sul nastro è 13, la stessa macchina eseguirà il seguente calcolo

$$\begin{array}{l}\overset{Q}{\Downarrow}\\ \boxed{1}\boxed{3}\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\overset{Q}{\Downarrow}\\ \boxed{1}\boxed{3}\end{array}$$

Nello stato Q legge 3, e non essendovi una quintupla applicabile si ferma.

Riassumendo, alcune macchine di Turing, con certi dati in ingresso, si arrestano; altre no. L'applicazione a simili casi del metodo della diagonale di Cantor condusse Turing alla scoperta di problemi che le sue macchine non potevano risolvere, e, come passo successivo, alla dimostrazione dell'insolubilità dell'*Entscheidungsproblem.*

TURING APPLICA IL METODO DELLA DIAGONALE DI CANTOR

Il corso di Max Newman che aveva fatto conoscere l'*Entscheidungsproblem* a Turing culminava con il teorema di incompletezza di Gödel; e dunque era naturale che egli, riflettendo sull'idea di rappresentare le sue macchine come elenchi di quintuple, pensasse di codificarle per mezzo dei numeri naturali e di usare il metodo della diagonale di Cantor. Qui ripercorreremo il filo del suo ragionamento e introdurremo un codice simile, ma non uguale, a quello da lui usato.

Per costruire il nostro sistema di codifica immagineremo che le quintuple che costituiscono una macchina di Turing siano scritte una dopo l'altra e separate da un punto e virgola; per esempio, la macchina formata dalle due quintuple

$$Q\ 1 : 1 \rightarrow Q \quad Q\ 2 : 2 \leftarrow Q$$

verrà scritta Q 1 : 1 → Q; Q 2 : 2 ← Q. Sostituiremo quindi ogni simbolo con una stringa di cifre decimali seguendo questo schema:

- Per i simboli di nastro si usano stringhe che cominciano e finiscono per 8 e in mezzo hanno solo le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5. La tabella nella pagina successiva dà l'esatta rappresentazione che useremo per le cifre decimali e per □ (come simboli scritti sul nastro), nonché per i cinque simboli → ← ⋆ : ;
- Per gli *stati* si usano stringhe che cominciano e finiscono per 9 e in mezzo hanno (se le hanno) solo le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5. In particolare, lo stato iniziale Q sarà rappresentato dalla stringa 99.

Così, la macchina di Turing a due quintuple appena ricordata sarà codificata dal numero 998018 646 8018 616 99 77 998028 646 8028 626 99. Gli sta-

Simbolo	Rappresentazione	Simbolo	Rappresentazione
0	8008	□	8558
1	8018	→	616
2	8028	←	626
3	8038	⋆	636
4	8048	:	646
5	8058	;	77
6	8518		
7	8528		
8	8538		
9	8548		

Rappresentazione delle cifre decimali e di □ e dei simboli → ← ⋆ : ;

ti E, O, F della macchina di Turing che distingue i numeri dispari dai numeri pari possono invece venir codificati con 919, 929 e 939; il codice numerico dell'intera macchina sarà quindi quello riportato nella tabella alla pagina successiva.

Si tratta di un unico numero, scritto inserendo delle spaziature per mettere in evidenza i codici delle singole quintuple. In ogni caso, individuare le quintuple nella codifica complessiva è molto semplice: prima troviamo i 77 che separano i codici delle quintuple e poi decodifichiamo ciascuna quintupla. Per esempio 92985386468558616919 si divide in 929 8538 646 8558 616 919, che decodificato diventa O 8 : □ → E. Naturalmente le codifiche possono essere molto diverse, ma questo particolare sistema ha la proprietà, molto importante e utile, che la sua decodifica è trasparente.[18]

Possiamo sempre supporre che una certa macchina di Turing inizi, come negli esempi precedenti, leggendo la prima cifra a sinistra di un numero scritto sul suo nastro. Con alcuni di questi numeri la

9980086468558616919 77 9980286468558616919 77 9980486468558616919 77
9985186468558616919 77 9985386468558616919 77 9980186468558616929 77
9980386468558616929 77 9980586468558616929 77 9985286468558616929 77
9985486468558616929 77 91980086468558616919 77 91980286468558616919 77
91980486468558616919 77 91985186468558616919 77 91985386468558616919 77
91980186468558616929 77 91980386468558616929 77 91980586468558616929 77
91985286468558616929 77 91985486468558616929 77 92980086468558616919 77
92980286468558616919 77 92980486468558616919 77 92985186468558616919 77
92985386468558616919 77 92980186468558616929 77 92980386468558616929 77
92980586468558616929 77 92985286468558616929 77 92985486468558616929 77
91985586468008636939 77 92985586468018636939

Codice numerico dell'intera macchina di Turing che distingue i numeri dispari dai numeri pari.

macchina finirà per fermarsi, mentre con altri può andare avanti per sempre. Diremo che l'insieme dei numeri del primo tipo è il suo *insieme di fermata*. *Ora, se pensiamo l'insieme di fermata di una macchina di Turing come un «pacchetto» e il codice numerico di quella macchina come l'etichetta di quel pacchetto, ritroviamo precisamente il quadro tipico che consente l'applicazione del metodo della diagonale: pacchetti che contengono certe cose e hanno etichette che sono cose dello stesso tipo – in questo caso, numeri naturali.*[19] Il metodo della diagonale ci consentirà di costruire un insieme di numeri naturali (chiamiamolo D) diverso dall'insieme di fermata di qualsiasi macchina di Turing. Vediamo come. *D sarà formato esclusivamente da codici numerici di macchine di Turing, e il codice numerico di una qualsiasi macchina di Turing apparterrà a D se e solo se non appartiene all'insieme di fermata di quella macchina.* In altre parole, se il codice numerico di una certa macchina di Turing appartiene al suo insieme di fermata, allora non appartiene a D; e viceversa, se non appartiene all'insieme di fermata, allora appartiene a D. Nell'uno come nell'altro caso D non può essere l'insieme di fermata della macchina in questione; e poiché questo vale per ogni macchina di Turing, concludiamo che *D non è l'insieme di fermata di nessuna macchina di Turing.*

Ma ecco che entra in scena un Uomo Testardo (UT), che non si lascia convincere. Ascoltiamo la conversazione fra UT e l'Autore Onnisciente (AO):

UT Non ho seguito bene il ragionamento, ma so comunque di poter costruire una macchina di Turing il cui insieme di arresto è D. Anzi, eccola qui.

AO Già. Ti dispiacerebbe calcolare il codice della tua macchina?

UT Volentieri! Vediamo un po'... è 99803864 68558561692977 ... 7792985286468558616929 [spara un numero enorme].

AO Bene. E questo numero è nell'insieme di fermata della macchina?

UT Ci devo pensare. No, non è nell'insieme di fermata.

AO Adesso ascoltami. Se questo numero non è nell'insieme di fermata della tua macchina deve essere in *D*, per come abbiamo definito *D*; ma poiché è in *D* e non è nell'insieme di fermata della tua macchina, i due insiemi devono essere diversi.

UT Fammi controllare. Ah già, ho commesso un piccolo errore. In realtà, il numero è proprio nell'insieme di fermata della mia macchina. Mi scuso per lo stupido errore.

AO Non essere precipitoso. Se il codice numerico della tua macchina è nel suo insieme di fermata, sicuramente non è in *D*, dato il modo in cui quest'ultimo è stato definito. Perciò i due insiemi devono essere diversi.

UT Quello che dici suona abbastanza plausibile, ma se ammettessi che hai dimostrato la tua tesi non sarei io.

PROBLEMI INSOLUBILI

Abbiamo definito un insieme di numeri naturali *D* diverso dall'insieme di arresto di qualsiasi macchina di Turing: ma qual è il legame con l'*Entscheidungsproblem*? Il nesso esiste e ha a che fare proprio con la ragione per cui Hilbert aveva definito l'*Entscheidungsproblem* il problema fondamentale della logica matematica. Hilbert aveva capito che la sua soluzione avrebbe fornito un algoritmo capace di rispondere a tutte le domande matematiche (l'aveva capito anche Hardy e per questo era sicuro che una tale soluzione non esistesse). Supponiamo di prendere per buona una simile ipotesi: ne deriverà che se di un qualche problema matematico si può dimostrare che è algoritmicamente insolubile, sarà insolubile lo stesso *Entscheidungsproblem* – e l'insieme *D* ci fornisce proprio un esempio di questo tipo.

Consideriamo il seguente problema:

Trovare un algoritmo che dato un numero naturale stabilisca se appartiene o no all'insieme D.

Dico che non c'è soluzione. Per vedere che non esiste alcun algoritmo con queste caratteristiche osserviamo innanzitutto che, se esistesse, allora, in base all'analisi del processo di calcolo condotta da Turing, dovrebbe esservi una macchina di Turing in grado di fare le stesse cose che fa questo algoritmo. Possiamo quindi immaginare, come abbiamo fatto con quella costruita per distinguere i numeri pari dai dispari, che questa macchina inizi leggendo, nello stato Q, la prima cifra a sinistra del numero che le è stato fornito, così:

Q
⇓

3	2	6	9	1

Vorremmo, analogamente, che alla fine la macchina si fermasse col nastro completamente vuoto tranne una sola cifra: 1 se il numero d'ingresso appartiene a *D*, 0 se non gli appartiene. Per finire, vorremmo che si fermasse in uno stato F tale che nessuna delle sue quintuple cominciasse con F stessa.[20] Il calcolo, ad esempio, potrebbe terminare così:

F
⇓

					0

Immaginiamo ora di aggiungere alla nostra presunta macchina di Turing le due quintuple

$$\mathbf{F}\,0:\Box\to\mathbf{F}\quad\text{e}\quad\mathbf{F}\,\Box:\Box\to\mathbf{F}$$

Se l'ingresso appartiene a *D* la nuova macchina si comporterà come prima e alla fine si fermerà avendo sul nastro un 1, ma se non appartiene a *D* continuerà a spostarsi a destra per sempre. Dunque l'insieme di fermata di questa presunta nuova macchina sarà identico a *D*. Ma questo è impossibile perché *D* è stato costruito (usando il metodo della diagonale) in modo da risultare diverso dall'insieme di fermata di qualsiasi macchina; dunque l'ipotesi che vi sia un algoritmo per distinguere i membri di *D* dai non membri dove essere errata. Un algoritmo così non esiste, e il problema di distinguere algoritmicamente i membri di *D* dai non membri è insolubile.

Come già sappiamo, Hilbert e Hardy credevano entrambi che una soluzione algoritmica dell'*Entscheidungsproblem* implicasse la possibilità di decidere *qualsiasi* problema matematico algoritmicamente; perciò se abbiamo un problema matematico algoritmicamente insolubile ne dovrebbe seguire l'insolubilità dello stesso *Entscheidungsproblem*. Per capire che legame vi sia fra tutto questo e l'insieme *D* associamo a ogni numero naturale *n* la seguente ipotetica premessa e conclusione

PREMESSA

n è il codice numerico di una macchina di Turing; lo stesso numero è scritto sul nastro della stessa macchina, la quale legge la prima cifra a sinistra.

CONCLUSIONE

Questa macchina di Turing, fatta partire in questo modo, finirà per fermarsi.

È possibile tradurre entrambe queste proposizioni nella notazione della logica del primo ordine. È inoltre possibile dimostrare che la conclusione può essere derivata dalla premessa usando le regole di Frege se e solo se effettivamente la macchina di Turing in questione, quando parte avendo sul nastro il suo stesso codice numerico, finisce realmente per fermarsi. Ma questo è vero, a sua volta, se e solo se n non appartiene a D. Perciò, se possedessimo un algoritmo per l'*Entscheidungsproblem* potremmo usarlo per decidere l'appartenenza a D. Più esattamente, dato un numero naturale n potremmo usare il presunto algoritmo dell'*Entscheidungsproblem* per controllare se la conclusione deriva dalla premessa. Se ne derivasse sapremmo che n non appartiene a D; se non ne derivasse sapremmo che gli appartiene. Ne segue che l'*Entscheidungsproblem* è algoritmicamente insolubile.[21]

LA MACCHINA UNIVERSALE DI TURING

Nei risultati di Turing c'era però qualcosa di problematico. Aveva dimostrato che non si poteva usare una macchina di Turing per risolvere l'*Entscheidungsproblem*, ma per passare da questo risultato alla conclusione che non esisteva nessun algoritmo, di nessun genere, capace di risolvere tale problema aveva dovuto utilizzare la propria analisi di quello che accade quando un essere umano esegue un computo. Ora, quanto era convincente la sua tesi che ogni compito di questo tipo poteva essere svolto da una macchina da Turing? Per consolidarla dimostrò che queste macchine potevano eseguire una grande varietà di complicati calcoli matematici;[22] ma la più audace e lungimirante delle idee che escogitò per mettere alla prova la validità di tutta la sua costruzione fu quella della macchina universale.

Immaginiamo due numeri naturali scritti (in notazione decimale ordinaria) sul nastro di una macchina di Turing e separati da una casella vuota, e supponiamo che il primo sia il numero di codice di una macchina, diciamo $\mathcal{M}$, e il secondo un ingresso della stessa $\mathcal{M}$.

Codice numerico di una macchina di Turing $\mathcal{M}$		Ingresso di $\mathcal{M}$

E ora immaginiamo che una persona debba scoprire che cosa farebbe la macchina di Turing il cui numero di codice è il primo numero sul nastro se le fosse dato come ingresso il secondo. La soluzione è immediata: questa persona potrebbe, per cominciare, ricavare le quintuple che costituiscono la macchina codificata dal primo numero e poi fare sul secondo numero tutto ciò che tali quintuple prescrivono. Ora, l'analisi di Turing mirava a dimostrare che qualunque calcolo poteva essere svolto da una macchina di Turing. In questo caso si poteva immaginare una macchina di Turing che partendo dal codice numerico di una macchina $\mathcal{M}$, seguito sul nastro dal numero dato in ingresso a $\mathcal{M}$, facesse esattamente ciò che avrebbe fatto $\mathcal{M}$ se le fosse stato fornito quell'ingresso. *Questa macchina sarebbe stata una macchina di Turing capace di svolgere, da sola, i compiti di qualunque macchina di Turing.* Era una conclusione molto impegnativa, e per verificarla Turing si propose di mostrare in che modo si potevano effettivamente produrre le quintuple di una simile macchina universale. Vi riuscì brillantemente, in poche pagine di ciò che oggi chiameremmo programmazione.[23]

Era dai tempi di Leibniz, e anche prima, che si pensava alle macchine calcolatrici; ma prima di Turing si era sempre supposto che la macchina stessa, il programma e i dati fossero entità del tutto distinte.

La macchina era un oggetto fisico, che oggi chiameremo lo hardware; il programma era un piano per l'esecuzione del calcolo che poteva materializzarsi in una serie di schede perforate o nelle connessioni volanti tra i punti di contatto di un pannello di controllo; i dati, infine, erano l'ingresso numerico. Ora, la macchina universale di Turing dimostrava che la distinzione tra queste categorie era illusoria. Inizialmente noi possiamo vedere una macchina di Turing come un congegno che ha componenti meccaniche, lo *hardware*. Ma sul nastro della macchina universale il suo codice numerico funziona esattamente come un *programma*, che dà alla macchina stessa le istruzioni dettagliate per una corretta esecuzione del calcolo. Infine, nel suo procedere passo dopo passo, la macchina universale tratta le cifre del codice di una macchina come semplici *dati* sui quali lavorare. Oggi questa fluidità dei tre concetti è fondamentale per l'informatica. Un programma scritto in un moderno linguaggio di programmazione è un insieme di dati per l'interprete o compilatore, che lo elabora in modo che le sue istruzioni possano venire eseguite; la stessa macchina universale di Turing può essere considerata un interprete, dato che funziona interpretando una successione di quintuple in modo da eseguire il compito che questa specifica.

L'analisi di Turing offriva una visione nuova e profonda dell'antica arte del calcolo, rivelando che la nozione stessa di calcolo andava ben oltre i calcoli aritmetici e algebrici. Allo stesso tempo compariva all'orizzonte macchine universali capaci, in linea di principio, di calcolare tutto il calcolabile. I casi descritti da Turing sono già esempi dell'arte della programmazione; in particolare, la macchina universale è il primo esempio di programma interprete. Essa fornisce inoltre un modello di interprete con programma memorizzato, in cui le quintuple codificate sul nastro svolgono il ruolo del programma, e in cui peraltro la macchina non fa distinzioni fondamentali tra i dati e il programma. Infine la macchina universale ci mostra come lo hardware in forma di insieme di quintuple (pensate come descrizione del funzionamento di un meccanismo) possa essere sostituito da un software equivalente costituito da quelle stesse quintuple, ma codificate e immagazzinate sul nastro di una macchina universale.

Mentre lavorava a dimostrare che non esiste una soluzione algoritmica dell'*Entscheidungsproblem*, Turing non sospettava nemmeno che sulla sponda opposta dell'Atlantico qualcuno stesse giungendo a conclusioni analoghe alle sue. Newman aveva già ricevuto una prima stesura del suo articolo, quando a Cambridge arrivò un numero dell'«American Journal of Mathematics» che conteneva un lavoro di Alonzo Church dell'Università di Princeton, intitolato *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*,[24] in cui si dimostrava appunto che esistono problemi algoritmicamente insolubili. Church non parlava di macchine, ma richiamava l'attenzione su due concetti che erano stati proposti come esplicazioni della nozione intuitiva di calcolabilità o, per usare il suo termine, «calcolabilità effettiva»: quello di *lambda definibilità*, creato da lui stesso insieme al suo allievo Stephen Kleene, e quello di *ricorsività generale*, introdotto da Gödel nelle conferenze tenute nella primavera del 1934 a Princeton. Era già stato dimostrato che le due nozioni erano equivalenti, e in effetti il problema insolubile di Church era tale rispetto a entrambe. Nel suo articolo, per la verità, Church non ne aveva dedotto che ciò dovesse valere anche per l'*Entscheidungsproblem* di Hilbert, ma lo fece in una breve nota pubblicata sul primo numero del «Journal of Symbolic Logic» (1936). Turing riuscì subito a dimostrare che la sua nozione di computabilità era equivalente alla lambda-definibilità e decise di andare a Princeton per qualche tempo.

Molti dei suoi risultati erano una semplice riscoperta di cose già fatte negli Stati Uniti, ma l'analisi della nozione di calcolo e la scoperta della macchina calcolatrice universale erano completamente nuove.[25] Kurt Gödel era abbastanza scettico nei confronti delle idee di Church, e fu solo l'analisi di Turing a convincerlo, finalmente, che erano corrette.[26]

ALAN TURING A PRINCETON

Benché normalmente i matematici inglesi non si preoccupassero di arrivare al dottorato, per Turing risultò quanto mai opportuno andare a Princeton da *graduate student*, cioè in una posizione veramente anomala, dati i risultati che aveva ottenuto, e nei due anni in cui vi rimase completò (avendo come relatore Church) una tesi di dottorato davvero notevole. Poiché la proposizione *U* di Gödel, indecidibile entro un dato sistema, risultava vera quando veniva vista dall'esterno, era del tutto naturale aggiungerla al sistema come nuovo assioma, ottenendo così un altro sistema nel quale non era più indecidibile. Naturalmente l'applicazione dei metodi di Gödel avrebbe rivelato che anche il nuovo sistema aveva le sue proposizioni indecidibili; nella propria dissertazione Turing studiava appunto le gerarchie di sistemi che si ottenevano ripetendo indefinitamente questa operazione.

Nello stesso lavoro veniva introdotta anche l'idea di una macchina di Turing modificata in modo da poter interrompere i calcoli per cercare informazioni esterne. Con macchine di questo tipo diventava possibile asserire che, di una coppia di problemi insolubili, uno era «più insolubile» dell'altro. Complessivamente le idee contenute in questo scritto avrebbero fornito materiale su cui lavorare a una lunga serie di studiosi.[27]

Nel 1936 il dipartimento di matematica di Princeton era alloggiato (e lo sarebbe rimasto fino a tutti gli anni Cinquanta) nella Fine Hall, una bassa e gradevole costruzione di mattoni rossi che ospitava non solo i professori, ma anche i matematici del neonato Institute for Advanced Study. Era già cominciato il grande flusso verso gli Stati Uniti degli scienziati in fuga dal regime nazista, e in quel periodo la concentrazione di talenti matematici a Princeton arrivò a superare quella di Göttingen. Nei corridoi della Fine Hall si potevano incontrare Hermann Weyl, Albert Einstein e John von Neumann (i cui interessi, peraltro, erano ormai lontanissimi dal programma di Hilbert e dai fondamenti della matematica).

Durante il suo primo anno a Princeton Turing tirò avanti alla meno peggio con il magro stipendio che gli spettava come *fellow* del King's College (a Cambridge, dove riceveva anche vitto e alloggio, sarebbe stato più che sufficiente). L'anno successivo, tuttavia, ebbe l'impressione d'esser diventato ricco, poiché gli era stata concessa la prestigiosa borsa Procter. Fra le lettere di raccomandazione a sostegno della sua candidatura c'era la seguente:

1° giugno 1937

Signore,

Mr. A.M. Turing mi ha informato che intende candidarsi da Cambridge, per l'anno accademico 1937-1938, per una borsa di studio Proctor [*sic*] presso l'Università di Princeton. Desidero appoggiare la sua richiesta, e informarla che conosco assai bene Mr. Turing fin dal 1935. Durante l'ultimo trimestre del 1935, infatti, essendo io in visita a Cambridge, e poi durante l'anno 1936-1937, che Mr. Turing ha trascorso qui a Princeton, ho avuto modo di osservare la sua attività scientifica. *Egli ha fatto un buon lavoro in rami della matematica che rientrano nei miei interessi, e cioè la teoria delle funzioni quasi periodiche e la teoria dei gruppi continui* [corsivo mio].

Ritengo che come candidato alla borsa Proctor egli sia perfettamente qualificato, e sarei lietissimo se le fosse possibile concedergliene una.

Rispettosamente Suo, John von Neumann.[28]

Dato che von Neumann si era occupato a fondo del programma di Hilbert e dei fondamenti della matematica, è davvero sorprendente che nella lettera non siano ricordati il lavoro di Turing sulla calcolabilità e la sua dimostrazione dell'insolubilità dell'*Entscheidungsproblem*. È difficile credere che non ne sapesse niente. A mio parere, l'indizio che permette di dare un senso al suo atteggiamento sta nell'espressione «rami della matematica che rientrano nei miei interessi»: evidentemente von Neumann, che era uno dei massimi matematici del secolo nonché un lettore onnivoro con una memoria quasi fotografica, dopo che Gödel aveva dimostrato l'inutilità di gran parte del suo lavoro nel settore dei fondamenti aveva deciso di non occuparsi più di logica (pare addirittura che avesse detto di non averne più letto nemmeno una pagina dopo quanto Gödel aveva fatto nel 1931).[29] La cosa è di una certa rilevanza perché il lavoro di Turing ebbe un ruolo importante nella sua riflessione sui calcolatori durante e dopo la seconda guerra mondiale.

Una indicazione in tal senso si trova in una lettera di Stanislaw Ulam,[30] collaboratore di von Neumann, al biografo di Turing Andrew Hodges in cui si parla di un gioco proposto da von Neumann nell'estate del 1938 mentre, insieme allo stesso Ulam, era in viaggio verso l'Europa: «Si doveva scrivere su un pezzo di carta il numero più grande che si poteva, definendolo con un certo metodo che in realtà aveva a che fare con gli schemi di Turing». Ulam scrive inoltre: «... nel 1939 von Neumann mi fece diverse volte il nome di Turing a proposito di metodi meccanici per lo sviluppo di sistemi matematici formali».[31] Dalla lettera è chiaro che, a prescindere da come stessero le cose un paio d'anni prima, nel settembre del 1939, allo scoppio del conflitto, von Neumann sapeva del lavoro di Turing sulla calcolabilità.

Il calcolatore universale era un apparato concettuale meraviglioso, capace di eseguire da solo qualsiasi compito di natura algoritmica: ma era materialmente possibile costruirlo? E a prescindere dalle sue capacità di principio, una macchina del genere, una volta progettata e fabbricata, avrebbe saputo risolvere i problemi del mondo reale in un tempo ragionevole e consumando una quantità ragionevole di risorse? Turing si pose subito queste domande. In un necrologio sul «Times» scritto da Max Newman, che era stato uno dei suoi maestri, si legge: «La descrizione che allora egli ci diede di una macchina calcolatrice "universale" aveva fini puramente teorici. Ma il grande interesse di Turing per ogni genere di esperimento pratico lo rendeva anche allora interessato alla possibilità di costruire fisicamente una macchina di questo tipo».[32]

Ma Turing non si limitò a *pensare* a questa possibilità. Per impadronirsi di quelle che erano le tecnologie allora esistenti arrivò a costruire materialmente (e per lui fu una grande fatica), usando circuiti elettromeccanici, una macchina che moltiplicava numeri scritti in notazione binaria. Fu per questo che chiese (e ottenne) di avere accesso all'officina dei *graduate students* del dipartimento di fisica, dove mise insieme diverse parti della sua macchina costruendo personalmente i circuiti di cui aveva bisogno.[33]

Turing tornò a Cambridge nell'estate del 1938, e benché mancasse ancora più di un anno alla guerra fu subito chiamato a lavorare alla decrittazione delle comunicazioni militari tedesche. C'erano già stati codici e decodifiche nel suo lavoro, come in quello di Gödel, ma si trattava di codici volutamente trasparenti, mentre questi erano stati creati per essere impenetrabili (e tali furono sempre ritenuti in Germania, fino al termine della guerra).

Il 1° settembre 1939, all'indomani del trattato fra la Germania nazista e l'Unione Sovietica che colse il mondo di sorpresa, le truppe tedesche invasero la Polonia; pochi giorni dopo Francia e Inghilterra dichiararono guerra alla Germania e il 4 settembre Turing si presentò a Bletchley Park, una villa di campagna vittoriana a nord di Londra, dove si era formato un piccolo gruppo di persone, perlopiù provenienti dalle università, intenzionate a leggere i messaggi che il nemico si sforzava di mantenere segreti. Ma il gruppo non era destinato a restare piccolo: verso la fine del conflitto a Bletchely Park c'erano circa dodicimila persone che lavoravano su vari aspetti della decrittazione e analisi dei messaggi. Oltre ai funzionari di più alto livello, e ovviamente ai militari, c'era un buon numero di *Wrens*, le ausiliarie del Women's Royal Naval Service, le quali, arruolatesi nei corpi della marina, si trovarono invece a manovrare i congegni inventati da Turing e colleghi.

Il sistema di comunicazione tedesco usava una versione modificata di una macchina per crittare già presente sul mercato, chiamata Enigma. La macchina aveva una normale tastiera alfabetica, e quando si premeva il tasto di una lettera, in una finestrella ne compariva un'altra: la versione cifrata. Una volta cifrato, il messaggio veniva inviato normalmente via radio; il destinatario lo immetteva in un'altra macchina dello stesso tipo, e riappariva il messaggio originale. Nella macchina vi erano dei rotori che, una lettera dopo l'altra, modificavano l'accoppiamento tra la lettera originaria e quella cifrata, e nella versione militare la sicurezza era ulteriormente rafforzata da un pannello di commutazione. Ogni giorno la configurazione iniziale della macchina (che doveva essere sempre la stessa per emittente e ricevente) veniva cambiata.

Prima della guerra i matematici polacchi avevano fatto un lavoro notevolissimo riuscendo a decifrare i messaggi di Enigma, ma dopo che i tedeschi ebbero aggiunto al sistema un nuovo livello di complessità, si impantanarono e passarono i loro risultati agli inglesi. I criptoanalisti di Bletchley Park erano quasi tutti appassionati di enigmistica, e c'erano dei momenti in cui gli aspetti intellettuali dei loro problemi li assorbivano a fondo e li divertivano; ma il lavoro che facevano era mortalmente serio. Turing aveva la responsabilità specifica delle comunicazioni fra i sommergibili tedeschi e le loro basi. Le navi che assicuravano i rifornimenti indispensabili per la vita sulle isole britanniche venivano affondate dagli U-Boot con allarmante frequenza; se non fosse riuscita a fermarli l'Inghilterra poteva soccombere per pura e semplice fame. La decrittazione del traffico di Enigma fu facilitata da un cifrario recuperato su un sommergibile catturato dagli inglesi e da una certa disattenzione dei mittenti, che si lasciarono sfuggire informazioni cruciali; ma il ruolo decisivo fu quello di Turing, che progettò una macchina (detta «Bomba» per qualche ragione che oggi nessuno ricorda più) efficientissima nell'usare queste informazioni per dedurne le configurazioni giornaliere di Enigma. Attraverso lunghe catene di ragionamenti logici le Bombe eliminavano una dopo l'altra le possibili configurazioni della macchina (che erano un numero enorme), risparmiandone pochissime che poi venivano controllate a mano finché saltava fuori quella giusta.[34]

Le Bombe di Turing avevano caratteristiche notevoli. Le prime dodici furono costruite e consegnate in pochi mesi dopo che Alan ebbe completato il suo progetto dettagliato e, incredibilmente, funzionarono senza modifiche. Ottenere la configurazione del sistema utilizzato dalla marina tedesca in un dato giorno significava trovare la combinazione giusta fra qualcosa come 150 000 000 000 000 000 000 possibilità: in media le Bombe risolvevano il problema in tre ore, e ci fu un caso in cui ci misero quattordici minuti.

A Bletchley Park Turing era affettuosamente chiamato «il Prof», e le sue stranezze divennero fonte di una serie di aneddoti. Ancora dopo anni si parlava della sua abitudine di tenere la teiera incatenata al calorifero; ma la più rivelatrice fra le storie del periodo di Bletchley Park è forse quella di come imparò a usare il fucile. Nei giorni bui del 1940-1941, quando l'Inghilterra sembrava sull'orlo dell'invasione, Churchill decise l'istituzione di una milizia territoriale per la difesa civile, la Home Guard. Data la delicatezza del suo incarico, Turing ne era esentato, ma volle arruolarsi ugualmente per aver modo di imparare a sparare. Le reclute della Home Guard avevano l'obbligo di andare regolarmente alle esercitazioni, ma dopo un po' Alan decise che era una perdita di tempo e non andò più. Fu così convocato da un certo colonnello Fillingham, noto per diventare paonazzo con molta facilità, al quale spiegò pazientemente che si era arruolato per un solo motivo – imparare a sparare – e ora che era un provetto tiratore non aveva più motivo di recarsi alle esercitazioni. «Ma non è lei che deve decidere se andare o non andare... è il suo dovere di soldato... lei è soggetto al codice militare» disse il colonnello, e gli ricordò che quando aveva fatto richiesta di arruolarsi aveva compilato un modulo con la domanda: «Lei accetta il fatto che arruolandosi nella Home Guard si assoggetta alle leggi militari?». Al che Alan replicò che a quella domanda aveva risposto, e aveva scritto: «No». Avendola letta, infatti, gli era apparso evidente che non ci sarebbe stato nessun vantaggio a rispondere: «Sì».[55]

Un aneddoto divertente che la dice lunga sul carattere di Alan Turing, il quale si curava ben poco, del contesto a cui si conforma quasi sempre il nostro comportamento, e ripensava qualsiasi situazione da cima a fondo, partendo da zero, alla ricerca della miglior linea d'azione. Di fronte a quella domanda, chiunque avrebbe concluso che solo una risposta affermativa era accettabile; ma Turing la prese alla lettera e si chiese seriamente quale potesse essere la risposta migliore. Tuttavia questo modo di ragionare, che gli serviva magnificamente nella ricerca scientifica, non funzionava altrettanto bene nei rapporti con singole persone e con le istituzioni, e alla fine – non molti anni dopo – lo portò alla rovina.

A un certo punto Turing scoprì di essere molto amico di Joan Clarke, una giovane matematica che partecipava anche lei all'impresa di Bletchley Park. In effetti si rese conto di esserne innamorato, le chiese di sposarlo e lei fu felicissima di accettare. Quando, pochi giorni dopo, egli le disse delle proprie tendenze omosessuali, ne fu profondamente turbata, ma volle mantenere il fidanzamento. Di lì a pochi mesi, dopo che ebbero trascorso una vacanza insieme, Turing capì che la cosa non poteva funzionare, e si tirò indietro. A quanto pare, questa fu la prima e l'ultima volta in cui si permise anche solo di immaginare una relazione amorosa con una donna.

Intanto non aveva mai smesso di riflettere sull'applicabilità del suo concetto di macchina universale. La sua ipotesi era che il segreto dell'enorme potenza del cervello umano fosse legato proprio a questa nozione di universalità, che in qualche modo il nostro cervello fosse realmente una macchina universale; immaginava una macchina universale che, se mai fosse stata costruita, potesse giocare a scacchi, imparare più o meno come impara un bambino e – in ultima analisi – comportarsi in una maniera che si sarebbe dovuta chiamare intelligente. A Bletchley Park si parlava molto di queste cose, e Turing arrivò addirittura ad abbozzare un algoritmo che una macchina avrebbe potuto usare per giocare a scacchi. Ma intanto prendeva corpo, proprio a Bletchley Park, una parte dello hardware indispensabile per costruire la macchina universale.

Alcuni dei messaggi intercettati dagli inglesi – provenienti da fonti ai livelli più alti del regime nazista – non erano in codice Enigma e non venivano trasmessi normalmente via radio. Avevano invece le caratteristiche dei segnali per telescrivente, un sistema in cui ogni singola lettera di un testo era rappresentata da una riga di fori su un nastro di carta e, a differenza del vecchio alfabeto Morse, non c'era bisogno di un operatore umano. I tedeschi dovevano avere una macchina in grado di effettuare un'operazione unica che era contemporaneamente cifratura e trasmissione del messaggio; il ricevente avrebbe avuto una macchina decodificatrice. A Bletchley Park il sistema fu battezzato «Pesce» e Max Newman, il maestro di Turing, fu chiamato a decifrarlo; alcuni dei metodi da lui utilizzati furono chiamati scherzosamente *Turingismus* – alla tedesca – per indicarne la provenienza. Ma il «turingismo» richiedeva l'elaborazione di una quantità enorme di dati, e perché la decrittazione servisse a qualcosa bisognava elaborarli molto in fretta.[36]

Negli anni Trenta quasi tutti, in Europa e negli Stati Uniti, possedevano una radio, ma i transistor non erano ancora stati inventati e le radio contenevano un certo numero di tubi elettronici (le cosiddette valvole termoioniche) che durante il funzionamento brillavano come deboli lampade a incandescenza dissipando una gran quantità di calore. Come le lampadine, si bruciavano spesso e dovevano venir sostituite. Quando una radio smetteva di funzionare, le valvole venivano estratte dai loro zoccoli e portate in qualche laboratorio per essere controllate; dopodiché, una volta rimpiazzate quelle guaste, di solito la radio tornava in vita. Il catalogo della RCA, che elencava centinaia di modelli di valvole, era indispensabile per gli ingegneri e molto amato dai radioamatori. Nel marzo del 1943 Alan Turing s'imbarcò per tornare in patria dopo un soggiorno di diversi mesi negli Stati Uniti, dove aveva aiutato gli americani ad avviare un programma tutto loro di costruzione delle Bombe e a rilevare il monitoraggio dell'Enigma navale. Durante la traversata dell'Atlantico ammazzò il tempo studiando proprio il catalogo della RCA, ma c'era anche una ragione seria per guardarlo: qualcuno aveva scoperto che le valvole termoioniche potevano eseguire le stesse operazioni logiche che fino ad allora si facevano coi circuiti elettrici, e in più erano molto rapide. I loro elettroni avevano velocità vicine a quelle della luce, mentre i circuiti dipendevano da movimenti meccanici. In realtà dei circuiti a valvole termoioniche erano già stati usati sperimentalmente in telefonia, e Turing era da tempo in contatto con T. Flowers, un ingegnere molto capace che era stato all'avanguardia in questa ricerca. Così, sotto la guida di Flowers e Newman, prese rapidamente corpo una macchina che sostanzialmente era una realizzazione fisica del «*Turingismus*». Soprannominato Colossus, era una meraviglia dell'ingegneria che conteneva 1500 valvole. Era nato il primo calcolatore automatico elettronico del mondo. I calcoli che eseguiva erano di natura logica anziché aritmetica (né questo deve sorprendere); i messaggi tedeschi intercettati venivano forniti alla macchina, sotto forma di nastro perforato, da un lettore ottico estremamente veloce. Fascetti luminosi attraversavano i buchi della carta ed eccitavano cellule fotoelettriche che smistavano il segnale a Colossus. Era molto importante leggere il nastro rapidamente per non rallentare il lavoro delle valvole termoioniche. Flowers fece qualcosa di grandioso non solo perché arrivò alla fase operativa in pochi mesi, ma anche perché riuscì a far fare qualcosa di utile a una macchina con tutte quelle valvole; erano in molti a pensare che la cosa fosse impossibile a causa dell'elevata frequenza di avarie delle valvole.

Alla fine della guerra, nel 1945, Turing conosceva l'elettronica delle valvole termoioniche anche sul piano pratico, ed essendo convinto della possibilità di mettere insieme, per loro mezzo, circuiti con i quali costruire un calcolatore universale rifletté a lungo sui problemi della realizzazione pratica e sull'enorme varietà delle applicazioni. Ormai aveva bisogno solo di mezzi finanziari e materiali per trasformare in realtà il suo grande progetto.

VIII
LA COSTRUZIONE DEI PRIMI CALCOLATORI UNIVERSALI

CHI HA INVENTATO IL CALCOLATORE?

I moderni calcolatori sono un amalgama talmente complesso di logica e ingegneria che sarebbe ridicolo pretendere che un'unica persona ne sia «l'inventore». Eppure nel 1973, nel pronunciare la sentenza che concludeva una causa per un brevetto (tra Honeywell e Sperry Rand), un giudice vi andò molto vicino. Via via che la nostra storia procede, e dalle idee logiche che stanno alla base degli attuali calcolatori – generali o universali che dir si voglia – si passa alla loro costruzione effettiva, vengono in primo piano i problemi di ingegneria e le persone che sono riuscite ad affrontarli vittoriosamente. Vi sono versioni molto diverse della storia delle macchine calcolatrici, e prima di continuare il nostro racconto vale la pena di dare una rapida occhiata ai personaggi principali.

JOSEPH-MARIE JACQUARD (1752-1834). Il telaio Jacquard, una macchina in grado di produrre tessuti con un disegno specificato da una pila di schede perforate, ha rivoluzionato la pratica della tessitura in Francia e nel mondo. Con una certa enfasi, gli operatori del settore sostengono che si tratta del primo calcolatore. Tuttavia, pur essendo una splendida invenzione, il telaio Jacquard non è certo più simile a un calcolatore che a una pianola; infatti permette, proprio come una pianola, di controllare automaticamente un congegno meccanico grazie alla presenza o assenza di perforazioni in un mezzo che fa da substrato materiale dei dati in ingresso.

CHARLES BABBAGE (1791-1871). (Si veda sopra, p. 174). Babbage proponeva di utilizzare, nella sua macchina analitica, schede perforate simili a quelle del telaio Jacquard. Di Jacquard possedeva anche un autoritratto su stoffa.

ADA LOVELACE (1815-1852). Figlia di Lord Byron, aveva una grande passione per la matematica; ed era particolarmente entusiasta dell'idea di Babbage, tanto che tradusse dal francese un articolo sulla macchina analitica e vi aggiunse un lungo commento. È stata definita il primo programmatore di calcolatori della storia e un importante linguaggio di programmazione è stato battezzato Ada in suo onore. Viene spesso citato un suo aforisma: «Potremmo dire, molto appropriatamente, che la macchina analitica tesse *configurazioni algebriche* così come il telaio Jacquard tesse fiori e foglie».[1]

CLAUDE SHANNON (1916-2001). Nella sua tesi di master al MIT, pubblicata nel 1938, spiegò come usare l'algebra di Boole per progettare circuiti di commutazione complessi, contribuendo «a trasformare in scienza l'arte della progettazione di circuiti digitali».[2] La sua teoria matematica dell'informazione ha svolto un ruolo cruciale nella moderna tecnologia delle comunicazioni. Shannon è anche stato un pioniere degli algoritmi per calcolatori giocatori di scacchi e ha mostrato come costruire una macchina di Turing universale con due soli stati. L'ebbi come superiore diretto nell'estate del 1953, mentre lavoravo ai laboratori della Bell.

HOWARD AIKEN (1900-1973). Il suo calcolatore a relè elettromagnetici (l'*Automatic Sequence Controlled Calculator*), costruito dalla IBM a Harvard e inaugurato nel 1944, realizzava appieno l'idea di Babbage. Avendo realizzato una macchina specificamente destinata a quel calcolo numerico di cui avevano bisogno fisici e ingegneri, Aiken trovava difficile immaginare che una macchina concepita per essere generale potesse poi svolgere questo specifico compito numerico in modo efficiente. Si veda p. 175.

JOHN ATANASOFF (1903-1995). Poco prima che gli Stati Uniti entrassero in guerra, questo oscuro fisico dell'Università dello Iowa progettò e costruì, insieme al suo assistente Clifford Berry, un piccolo calcolatore dedicato che utilizzava valvole termoioniche. La sua macchina trattava solo problemi di un tipo molto speciale, ma è importante perché dimostrò l'utilità dei circuiti a valvole per i processi di calcolo.[3]

JOHN MAUCHLY (1907-1980). La creazione dell'ENIAC (il primo calcolatore elettronico destinato a trattare problemi numerici di grandi dimensioni), alla Moore School of Electrical Engineering dell'Università della Pennsylvania, si basava sulle idee di J. Mauchly. Mauchly, egli pure un fisico, aveva avuto l'opportunità di studiare il calcolatore elettronico costruito da Atanasoff a Ames, nello Iowa.

J. PRESPER ECKERT, JR. (1919-1995). La realizzazione dell'ENIAC fu possibile soprattutto grazie alle superiori capacità di Eckert, un brillante ingegnere elettronico.

HERMAN GOLDSTINE (1913-). Matematico, fu arruolato nell'esercito degli Stati Uniti nel 1942 e assegnato con il grado di tenente al Ballistic Research Laboratory of Army Ordnance. Fu lui, in qualità di rappresentante dell'esercito nel progetto ENIAC, a invitare von Neumann alla Moore School of Electrical Engineering dell'Università della Pennsylvania, e negli scontri che lo stesso von Neumann ebbe qualche tempo dopo con Mauchly ed Eckert si schierò dalla sua parte. Nel dopoguerra divenne anche il suo principale collaboratore nel lavoro sulla calcolabilità. Nella sua storia del calcolatore (Goldstine, 1972) diede grande rilievo al ruolo di von Neumann, attirandosi non poche critiche. (Nel 1954 era lui la persona cui dovetti chiedere l'autorizzazione a usare il calcolatore dell'Institute for Advanced Study).

EARL R. LARSON (1911-). È il giudice distrettuale che nel 1973 dichiarò non valido il brevetto ottenuto da Eckert e Mauchly per l'ENIAC. Nella motivazione della sentenza è detto: «Eckert e Mauchly non sono stati i primi a inventare il calcolatore digitale elettronico automatico, ma hanno ripreso l'idea da un certo dottor John Vincent Atanasoff».[4]

JOHN VON NEUMANN E LA MOORE SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Abbiamo già visto che nel 1930, alla conferenza di Königsberg, von Neumann si assunse il compito di spiegare il programma di Hilbert; che nella stessa conferenza Gödel lanciò la sua bomba, dimostrando che i sistemi formali della matematica erano necessariamente incompleti; e che John von Neumann fu il primo ad afferrare l'importanza di quel risultato. Poco tempo dopo lo stesso von Neumann, eccitatissimo, scriveva a Gödel: «Ho ottenuto un teorema che mi sembra davvero notevole: sono riuscito a mostrare che la coerenza della matematica non è dimostrabile». Quello che in realtà von Neumann aveva scoperto era che usando i metodi di Gödel si poteva dimostrare che sistemi come quelli che aveva in mente Hilbert non erano in grado di provare la propria coerenza. Quando ricevette la lettera, Gödel, come abbiamo visto (p. 155), aveva già raggiunto la stessa conclusione per conto suo, e anzi poté allegare alla risposta l'articolo che conteneva questo risultato.

John von Neumann era un uomo brillante e vanitoso, abituato a lasciare la propria impronta su un argomento matematico grazie alla pura e semplice forza del suo intelletto. Aveva dedicato molti sforzi al problema della coerenza dell'aritmetica, e a Königsberg si era addirittura presentato come difensore del programma di Hilbert; poi, afferrando immediatamente le profonde implicazioni del risultato di Gödel, aveva fatto un passo più in là e dimostrato l'indimostrabilità della coerenza, solo per scoprire che Gödel – ancora lui – l'aveva preceduto. Ormai ne aveva abbastanza, e pur essendo pieno di ammirazione per il logico boemo, del cui lavoro aveva addirittura parlato in pubblico, promise a se stesso di non occuparsi mai più di logica. Pare anche che si vantasse di non avere mai più letto un solo articolo in materia, dopo quello di Gödel; la logica l'aveva umiliato, e von Neumann non era abituato alle umiliazioni. Ma gli fu comunque impossibile mantenere la promessa, e a lungo andare il bisogno di meccanismi di calcolo molto potenti lo costrinse a tornare a occuparsi proprio di logica.

Il lavoro che aveva svolto in tempo di guerra richiedeva, come quello di Turing, calcoli su grande scala, ma mentre la criptoanalisi che si faceva a Bletchley Park privilegiava – in armonia con i lavori giovanili di Turing – il calcolo come lavoro su configurazioni simboliche, von Neumann aveva bisogno di macinare numeri alla vecchia maniera. Non sorprende che cogliesse al volo l'occasione di partecipare a un eccitante progetto della Moore School of Electrical Engineering di Philadelphia: la costruzione di un calcolatore elettronico potentissimo, l'ENIAC. A coinvolgerlo nell'iniziativa fu il trentenne matematico Herman Goldstine. I due si conobbero – racconta lo stesso Goldstine – in una stazione ferroviaria nell'estate del 1944, e poco tempo dopo von Neumann cominciò a partecipare alle riunioni di Philadelphia.

Se il Colossus, con i suoi 1500 tubi elettronici, era un prodigio d'ingegneria, l'ENIAC, che ne aveva 18 000, era semplicemente incredibile. All'epoca si credeva che un tale apparato non potesse minimamente garantire un funzionamento affidabile, perché si sarebbe sicuramente bruciata una valvola ogni pochi secondi. Buona parte della responsabilità del progetto ricadeva sull'ingegnere capo dell'ENIAC, John Presper Eckert, Jr., che pretendeva sempre un'altissima affidabilità dei componenti. Le valvole lavoravano a livelli energetici molto prudenziali, cosicché se ne bruciavano solo tre alla settimana. L'ENIAC – una macchina enorme (occupava per intero una grande stanza) – veniva programmata inserendo connessioni volanti tra i punti di contatto di un pannello di controllo abbastanza simile a un centralino telefonico manuale di una volta, ed era costruita sul modello delle macchine calcolatrici meglio riuscite allora disponibili, gli analizzatori differenziali.[5] Diversamente dai dispositivi digitali che elaborano le cifre di un numero una dopo l'altra, un analizzatore differenziale – o calcolatore analogico – *rappresentava* i numeri per mezzo di grandezze fisiche misurabili (come l'intensità di corrente o il potenziale) ed emulava le operazioni matematiche richieste collegando tra loro i diversi componenti. La precisione delle macchine analogiche aveva un limite nella precisione degli strumenti di misura. L'ENIAC era un apparato digitale, nonché la prima macchina elettronica in grado di affrontare gli stessi problemi matematici degli analizzatori differenziali; i suoi progettisti l'avevano costruito con componenti funzionalmente simili a quelle degli analizzatori digitali, puntando però sulla maggiore velocità e precisione dell'elettronica a valvole.[6]

Quando von Neumann cominciò a incontrarsi col gruppo della Moore School, non sembrava che vi fossero grandi ostacoli alla buona riuscita dell'ENIAC, e l'attenzione si spostò sul calcolatore da costruire subito dopo, provvisoriamente denominato EDVAC *Electronic Discrete Variable Calculator.* Von Neumann cominciò subito a occuparsi dell'organizzazione *logica* della nuova macchina. Come riferisce Goldstine, «Eckert era felice che von Neumann fosse così interessato ai problemi logici legati alla nuova idea, e le riunioni erano momenti di attività intellettuale intensissima. Il lavoro sul progetto logico della nuova macchina era esattamente ciò che von Neumann desiderava, e fu qui che il suo lavoro precedente sulle logiche formali risultò decisivo. Prima della sua entrata in scena, il gruppo della Moore School si era concentrato soprattutto sui problemi *tecnologici*, che erano immensi; ma non appena arrivò, egli prese il comando in merito ai problemi *logici*».[7]

Nel giugno del 1945 John von Neumann presentò una bozza di proposta, intitolata *Draft Report on the* «EDVAC», suggerendo in sostanza che l'EDVAC di prossima costruzione fosse fisicamente realizzato sul modello della macchina universale di Turing. L'EDVAC avrebbe posseduto la capacità – von Neumann la chiamava «memoria» – di immagazzinare, come il nastro di quella macchina astratta, sia dati sia istruzioni in codice. La nuova macchina avrebbe avuto però, per ragioni di praticità, anche una componente aritmetica in grado di effettuare ciascuna delle operazioni aritmetiche di base (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) in un solo passo, mentre nella concezione originaria di Turing queste operazioni andavano costruite a partire da altre più primitive, sul tipo di «spostati a sinistra di una casella». Mentre l'ENIAC eseguiva le sue operazioni aritmetiche su numeri espressi per mezzo delle dieci cifre decimali, l'EDVAC avrebbe fruito della semplificazione resa possibile dalla notazione binaria; inoltre avrebbe contenuto una componente deputata al controllo logico che doveva trasferire, una alla volta, le istruzioni da eseguire dalla memoria alla componente aritmetica. Questo tipo di organizzazione del calcolatore ha preso il nome di architettura di von Neumann, e gli odierni calcolatori sono ancora costruiti, in grandissima maggioranza, secondo questo modello di base, anche se i componenti di cui si fa uso sono molto diversi da quelli allora disponibili per l'EDVAC.[8]

Il rapporto sull'EDVAC non superò mai lo stadio della bozza, ed è chiaramente incompleto per vari aspetti. In particolare, in molti punti è stato lasciato uno spazio per un riferimento bibliografico da aggiungere successivamente. Il nome di Turing non viene mai citato, ma la sua influenza è chiara; più di una volta si afferma che l'EDVAC dovrà essere di carattere generale, e von Neumann lascia anche intendere, come Turing, che il cervello umano deve parte delle sue notevolissime capacità al fatto di saper funzionare come un calcolatore universale. Nella sua relazione, von Neumann torna ripetutamente sull'analogia fra il cervello e la macchina che sta descrivendo. È possibile – osserva von Neumann – progettare circuiti a valvole che sotto molti aspetti si comporteranno come i neuroni del nostro cervello; e spiega anche, senza scendere in dettagli ingegnerlatici, come costruire i componenti per il controllo logico e aritmetico dell'EDVAC a partire da questi circuiti. Benché quasi del tutto privo di bibliografia, il rapporto rimanda più di una volta a un articolo, pubblicato nel 1943 da due ricercatori del MIT, in cui si proponeva per l'appunto una teoria matematica di questi «neuroni» idealizzati. In seguito uno degli autori dichiarò che si erano ispirati direttamente a un articolo di Turing del 1936 (quello in cui egli descriveva la sua macchina universale), che in effetti era l'unico titolo citato nella bibliografia. Ancora più rivelatore è il fatto che i due si preoccupassero di dimostrare che con i loro neuroni idealizzati si poteva realizzare una macchina universale di Turing, e proprio in questo vedessero la principale ragione per credere giusta la direzione che avevano preso.[9]

Eckert e Mauchly presero molto male il fatto che von Neumann avesse messo in circolazione il rapporto sull'EDVAC sotto il proprio nome; in effetti il problema di quanto pesasse il suo contributo personale in questo documento è ancora controverso, e probabilmente non sarà mai completamente risolto. In seguito i due negarono che tale contributo fosse stato molto importante, ma poco tempo dopo la stesura del documento avevano scritto: «Fortunatamente nella seconda metà del 1944, e per tutto il tempo intercorso finora ... è stato possibile consultare il Dr. John von Neumann, che ha contribuito a molte discussioni sui controlli logici dell'EDVAC, preparato alcuni codici per le istruzioni e verificato i sistemi proposti scrivendo per esteso le istruzioni in codice per certi problemi specifici. Il Dr. von Neumann ha anche scritto un rapporto preliminare in cui è riassunta la maggior parte dei risultati delle precedenti discussioni ... Nel suo rapporto strutture e strumenti fisici ... sono rimpiazzati da elementi idealizzati per evitare problemi ingegneristici che potrebbero distogliere l'attenzione dalle considerazioni logiche in esame».[10]

Abbiamo anche altre indicazioni del fatto che von Neumann volesse assicurarsi che la macchina che stava cercando di definire fosse il più possibile universale; sottolineava ad esempio che il «controllo logico» di un calcolatore era cruciale perché questo fosse «quanto più possibile *generale*».[11] Il primo programma serio da lui scritto era dedicato – appunto per verificare l'applicabilità generale dell'EDVAC – non a quel tipo di calcolo numerico al quale era principalmente destinata la macchina, ma alla classificazione efficiente di dati. Il successo di questo programma lo convinse che «è legittimo concludere, sulla base dei dati attualmente disponibili, che l'EDVAC è molto vicino a a una macchina "generale" e che gli attuali princìpi dei controlli logici sono solidi».[12]

Alcuni articoli scritti un anno dopo il rapporto sull'EDVAC confermano che von Neumann si rendeva conto che i princìpi base della progettazione dei calcolatori elettronici si fondavano sulla logica. Ce n'è uno che comincia così: «In questo articolo cerchiamo di discutere le macchine [calcolatrici di grandi dimensioni] dal punto di vista non solo del matematico ma anche dell'ingegnere e del logico, cioè della persona, o del gruppo di persone, che è realmente competente a progettare strumenti scientifici».[13]

Un altro articolo, pur sottolineando che i ragionamenti puramente logici non sono sufficienti, contiene una chiara allusione alle idee di Turing: «È facile vedere, con metodi logico-formali, che esistono codici adeguati, *in abstracto*, per controllare e causare l'esecuzione di una qualsiasi successione di operazioni, che siano individualmente disponibili nella macchina, globalmente concepibile a chi pianifica il problema. Dal nostro punto di vista, tuttavia, le considerazioni veramente decisive per la scelta di un codice sono di natura più pratica: la semplicità della strumentazione richiesta dal codice e la chiarezza della sua applicazione ai problemi realmente importanti, insieme alla velocità con cui questi problemi vengono trattati. Il discutere simili questioni in modo generale, o partendo dai princìpi primi, ci porterebbe veramente troppo lontano».[14]

È ben accertato che i calcolatori creati dopo la seconda guerra mondiale erano profondamente diversi dai precedenti calcolatori automatici. Non altrettanto chiara è la natura della differenza: le macchine postbelliche erano state pensate come apparati universali capaci di eseguire qualsiasi processo simbolico, purché i passi di tale processo fossero specificati in modo preciso. È possibile che alcuni processi o richiedano più memoria di quanta se ne abbia a disposizione, o semplicemente siano troppo lenti per essere eseguibili nella pratica, e dunque una macchina reale poteva solo avvicinarsi a quella universale e ideale di Turing. Tuttavia era cruciale che essa avesse una memoria molto grande (corrispondente al nastro potenzialmente infinito di Turing) nella quale potessero coesistere istruzioni e dati, e questa fluidità del confine fra dato e istruzione significava che si potevano creare programmi che trattavano altri programmi come dati. Nei primi anni i programmatori usavano questa libertà soprattutto per creare programmi capaci di modificare se stessi – e che realmente lo facevano; ma oggi, nel nostro mondo di sistemi operativi e gerarchie di linguaggi di programmazione, sono possibili anche applicazioni molto più raffinate. Per un sistema operativo, i programmi che fa girare (come la videoscrittura o la posta elettronica) sono semplicemente dei dati, e il sistema li manipola assegnando a ciascuno la sua parte di memoria e (in *multiprogrammazione*) marcando le operazioni che ciascuno di essi richiede di compiere. Un compilatore traduce programmi scritti in uno degli attuali, ben noti linguaggi di programmazione in istruzioni di livello più profondo che possono essere eseguite direttamente dal calcolatore; dunque anche per il compilatore questi programmi sono dati.

Dopo l'esperienza con l'ENIAC e il Colossus, quelli che erano interessati alla strumentazione di calcolo non erano più disposti ad accettare velocità operative inferiori a quelle che sapevano di poter raggiungere con l'elettronica a valvole. Per un calcolatore di carattere generale ispirato al modello della macchina universale di Turing occorreva un dispositivo fisico capace di assicurargli una memoria abbastanza grande. Sul nastro della macchina universale astratta, per passare da una casella a un'altra bisognava compiere una faticosa serie di spostamenti di una casella per volta – e per gli scopi di Turing nel 1936 questo andava benissimo, visto che le sue macchine teoriche non erano state pensate per finalità applicative; ma un calcolatore elettronico veloce aveva bisogno di una memoria veloce, e per questo era indispensabile che i dati immagazzinati in ogni sua parte fossero direttamente accessibili in un solo passo – che la memoria fosse cioè ad accesso casuale.[15]

Nei tardi anni Quaranta c'erano due possibili candidati alla funzione di memoria di un calcolatore: la linea di ritardo acustica e il tubo catodico. La linea di ritardo era un tubo pieno di mercurio in cui i dati erano immagazzinati sotto forma di onde acustiche che rimbalzavano da un estremo all'altro; nei tubi catodici – che oggi sono conosciutissimi, perché servono per la televisione e i monitor dei PC – diventavano invece configurazioni della superficie del tubo stesso. Entrambi i sistemi ponevano problemi ingegneristici molto seri, ma fortunatamente per il progetto EDVAC, Eckert era riuscito a migliorare di molto la linea di ritardo per l'uso militare nei radar. (Nei primi anni Cinquanta, invece, furono i tubi catodici a diventare il substrato preferito per la memoria).

Quando si rievoca questo periodo, di solito parlando dei nuovi calcolatori che proprio allora venivano creati si dice che realizzavano il concetto di «programma memorizzato», perché i programmi da eseguire venivano memorizzati, per la prima volta, dentro la macchina. Purtroppo questa terminologia ha finito per oscurare il fatto che l'aspetto veramente rivoluzionario di tali calcolatori era il loro carattere generale e universale, mentre il programma memorizzato era semplicemente un mezzo in vista di un fine. La concezione di Turing e von Neumann è così semplice, ed è penetrata così a fondo nel nostro attuale clima intellettuale, che oggi ci è difficile capire quanto fosse radicale la sua novità; è molto più facile apprezzare l'importanza di una nuova invenzione, come la linea di ritardo acustica, che quella di una nuova idea astratta. Anni dopo, Eckert affermò di avere avuto l'idea del cosiddetto programma memorizzato ben prima che entrasse in scena von Neumann, e presentò come prova un appunto in cui parlava di programmazione automatica immagazzinata su dischi in lega metallica o con matrici incisioni. Nel documento non c'è nulla che richiami, anche lontanamente, il concetto di calcolatore generale con una memoria grande e flessibile nella quale coabitano istruzioni e dati. Ma caratterizzare il grande progresso che era stato realizzato con il concetto di programma memorizzato significa proprio confondere le due cose.[16]

La tensione fra Eckert e Mauchly da una parte e von Neumann e Goldstine dall'altra giunse al culmine quando i primi due cercarono di creare un prodotto commerciale chiedendo un brevetto per l'ENIAC e uno per l'EDVAC. La domanda per l'EDVAC cadde nel vuoto proprio a causa del *Draft Report* di von Neumann, che già da tempo era di pubblico dominio. Eckert e Mauchly riuscirono invece, come ho già spiegato, a ottenere un brevetto (in seguito dichiarato nullo da un tribunale) per l'ENIAC. Sicuramente furono lungimiranti perché riuscirono a intravedere le possibilità commerciali dei calcolatori elettronici di carattere generale, ma non riuscirono a trarre un profitto da questa intuizione.[17]

Con la defezione di Eckert e Mauchly la Moore School di Philadelphia perse gran parte del suo dinamismo, tanto che von Neumann e Goldstine proseguirono i loro studi sul calcolatore (usando una memoria a tubi catodici) all'Institute for Advanced Study di Princeton. La RCA aveva creato un tubo speciale nel quale von Neumann riponeva grandi speranze, e che però non funzionò; ma l'ingegnere inglese Frederic Williams (1911-1977) inventò una tecnica che consentiva di utilizzare efficacemente i normali tubi catodici, e per qualche anno la scena fu dominata da questa «memoria Williams». Vennero anche costruite diverse macchine, battezzate affettuosamente «johnniacs» (da John von Neumann), simili a quella dell'Institute. Quando la IBM decise che era tempo di mettere sul mercato i calcolatori elettronici di carattere generale, il primo modello (il 701) assomigliava moltissimo a un johnniac.[18]

IL CALCOLATORE AUTOMATICO DI ALAN TURING

Alla fine della seconda guerra mondiale il National Physics Laboratory britannico (NPL) ebbe una notevole espansione, fino a includere una nuova divisione matematica di cui fu nominato direttore J.R. Womersley (1907-1958). Womersley aveva afferrato per tempo le implicazioni pratiche di *Computable Numbers*, l'articolo scritto da Turing nel 1936, tanto che nel 1938 aveva cominciato a progettare una macchina universale che doveva utilizzare circuiti elettrici, salvo abbandonare il progetto quando si avvide che questa macchina sarebbe stata troppo lenta. Nel febbraio del 1945, durante una visita negli Stati Uniti, vide l'ENIAC, si procurò una copia del rapporto di von Neumann sull'EDVAC, e il risultato fu che assunse Alan Turing.

Verso la fine del 1945 anche Turing aveva prodotto uno scritto molto notevole, il rapporto sull'*Automatic Computing Engine* (ACE) all'Executive Committee del National Physics Laboratory (NPL). L'analisi dettagliata dei due rapporti rivela che quello di von Neumann «è una bozza non finita ... e, quel che è peggio ... è incompleto», mentre il lavoro di Turing «è una descrizione completa di un calcolatore, fino al livello dei diagrammi dei circuiti logici», e comprende persino «una stima dei costi (11 200 sterline)». Turing mostrava tutta l'ampiezza della sua visione includendo, in un elenco di dieci possibili problemi risolubili con l'ACE, il gioco degli scacchi e la soluzione di semplici rompicapo a incastro, cioè due cose che non avevano direttamente a che fare con dati numerici.[19]

L'ACE di Turing era una macchina molto diversa dall'EDVAC di von Neumann, e ciò rispecchiava da vicino il diverso atteggiamento dei due matematici. Von Neumann, pur essendo interessato a una macchina veramente «onnifunzionale», metteva al primo posto il calcolo numerico, e l'organizzazione logica dell'EDVAC (nonché dei johnniac successivi) era stata pensata per guadagnare velocità in questa direzione. Turing invece aveva in testa una macchina da adibire anche a molte mansioni per le quali un ricorso massiccio all'aritmetica sarebbe stato fuori luogo, e di conseguenza l'ACE era organizzato in modo molto più minimalista e più vicino alle macchine astratte del suo *Computable Numbers*. Le operazioni aritmetiche andavano affidate alla programmazione – al software più che allo hardware.

Per questo il progetto dell'ACE comprendeva un meccanismo destinato appositamente a incorporare operazioni già programmate in programmi più lunghi.[20] Turing si mostrava particolarmente caustico verso la proposta di modificare l'ACE «alla von Neumann»: «[Questa idea] è ... contrarissima alle linee di sviluppo che vengono seguite qui, e molto più vicina alla tradizione americana di risolvere le difficoltà servendosi di una gran quantità di apparecchiature in luogo del pensiero ... Inoltre sono state omesse certe operazioni che noi consideriamo più fondamentali dell'addizione e della moltiplicazione».[21]

Le idee minimaliste di Turing erano destinate ad avere un'influenza scarsa o nulla sull'evoluzione dei calcolatori, ma retrospettivamente possiamo vedere che la cosiddetta microprogrammazione, che rende direttamente accessibili al programmatore le operazioni più fondamentali del computer, era stata anticipata dal progetto dell'ACE. Inoltre i nostri PC sono costruiti intorno a microprocessori di silicio che in realtà sono calcolatori universali, che diventano sempre più elaborati, racchiusi in un chip. Un paradigma alternativo, la cosiddetta architettura RISC (*Reduced Instruction Set Computing*, calcolo con insieme di istruzioni ridotto), adottata da diversi produttori, utilizza sul chip un insieme di istruzioni minimale e fornisce la funzionalità indispensabile con la programmazione: ancora una volta, molto in linea con la filosofia dell'ACE.

Il 20 febbraio 1947 Turing parlò dei calcolatori elettronici digitali, e in particolare dell'ACE, davanti alla London Mathematical Society. Esordì ricordando *Computable Numbers*, il suo articolo del 1936: «Presi in considerazione un tipo di macchina che aveva un meccanismo centrale e una memoria infinita, contenuta in un nastro infinito ... Una delle mie conclusioni fu che i concetti di processo secondo "regole empiriche" e di "processo meccanico" erano sinonimi ... Macchine come l'ACE possono essere considerate versioni pratiche proprio di questo tipo di macchina, o almeno hanno con essa una stretta analogia». E ancora: «... macchine calcolatrici digitali come l'ACE ... sono in effetti versioni pratiche della macchina universale».[22] Turing proseguiva chiedendosi «in che misura sia possibile, in linea di principio, per una macchina calcolatrice simulare attività umane», e questa domanda lo portava a considerare la possibilità di una macchina programmata per imparare, e alla quale fosse permesso di commettere errori. «Invece di avere una situazione in cui la macchina a volte non dà risposte, potremmo aggiustare le cose in modo che essa dia ogni tanto risposte sbagliate. Anche il matematico umano prende qualche cantonata quando sperimenta nuove tecniche ... In altre parole, se ci si aspetta che la macchina sia infallibile, allora essa non può essere anche intelligente. Ci sono diversi teoremi che lo affermano quasi esattamente, ma che non dicono nulla su quanta intelligenza può essere esibita da una macchina che non abbia pretese di infallibilità» (riferimento indiretto al teorema di incompletezza di Gödel, sul quale avremo ancora qualcosa da dire nel prossimo capitolo). Turing invocava «fair play nei confronti delle macchine» osservando che «ogni matematico umano è sempre sottoposto a un addestramento prolungato». E concludeva: «... perché dovremmo aspettarci di più da una macchina?». Il gioco degli scacchi – disse – poteva essere un esercizio adatto, per cominciare.[23] All'epoca, nessuna apparecchiatura di questo tipo era stata realizzata! Il pubblico, stupefatto, rimase in silenzio.

Quando era facile ottenere risorse e aiuti adeguati, i dirigenti di Bletchley Park spedirono una lettera a Winston Churchill, il quale fece subito in modo che ricevessero ciò di cui avevano bisogno. Ma la costruzione dell'ACE non aveva una priorità così elevata, e per di più la direzione dell'NPL si dimostrò assolutamente inetta. T. Flowers, che aveva fatto scintille durante la costruzione del Colossus, sarebbe stato la persona adatta anche per l'ACE, ed ebbe effettivamente un contratto con l'NPL per costruire una linea di ritardo per la memoria del calcolatore, ma era tutto preso dal lavoro postbellico sulle telecomunicazioni e non si rese molto utile. C'era anche una diffusa preoccupazione per l'impianto minimalista dell'ACE, mescolata forse all'idea che sulle questioni tecnologiche ci si dovesse fidare più degli americani che di un eccentrico *don* inglese; d'altronde il contributo di questo *don* alla vittoria in guerra rimase un segreto, rigidamente custodito, per molti anni. Quando Williams dimostrò che la sua memoria a tubi catodici funzionava (si veda sopra, p. 230), si vide offrire un contratto per lavorare sull'ACE, ma rifiutò. I dirigenti dell'NPL avevano creduto, ingenuamente, di poterlo assumere perché costruisse il loro calcolatore, ma Williams disponeva già di risorse sufficienti per farsene uno suo a Manchester. Alla fine anche Turing ne ebbe abbastanza e se ne andò, prima ritornando al suo lavoro accademico a Cambridge e poi accettando un'offerta dell'Università di Manchester, dove un vecchio amico nonché collega del tempo di guerra, Max Newman, stava avviando il progetto di un altro calcolatore. Qualche tempo dopo, comunque, l'NPL, dopo aver assunto nuovo personale, riuscì a costruire una versione in piccolo dell'ACE, il cosiddetto «ACE pilota», che funzionò egregiamente per anni.

ECKERT, VON NEUMANN E TURING

Nella storia di quello che viene comunemente chiamato concetto di programma interno vi sono tre versioni. Secondo la prima versione, quel concetto era frutto del genio di von Neumann, così come si era manifestato nel rapporto sull'EDVAC. Eckert gridò: «Non vale», sostenendo di aver proposto un calcolatore con programma interno prima ancora che von Neumann entrasse nel gruppo della Moore School e che il rapporto sull'EDVAC rappresentava il pensiero collettivo del gruppo. Furono anche pubblicati degli articoli in appoggio a Eckert[24] (e che nemmeno nominavano Turing); intanto Goldstine, che si era schierato con von Neumann (ma dimenticandosi anche lui del ruolo di Turing) scriveva: «Per quanto ne so, von Neumann è stato il primo a comprendere chiaramente che nella sostanza un calcolatore esegue operazioni logiche, e gli aspetti elettrici hanno una funzione subordinata».[25] Naturalmente l'aveva capito benissimo anche Turing.

La distanza fra il pensiero che tradusse nell'ENIAC e il calcolatore universale è talmente smisurata che mi riesce difficile credere che Eckert avesse in mente qualcosa di simile al secondo. Quando criticava la «tradizione americana che risolve le difficoltà moltiplicando le attrezzature, e non col pensiero», è probabile che Turing avesse in mente l'ENIAC. Dalla sua conclusione che «i concetti di processo secondo "regole empiriche" e di "processo meccanico" erano sinonimi» è chiaro che per lui la conversione di un numero dal decimale al binario e viceversa era la più banale delle operazioni di una macchina. Eckert e Mauchly non se ne resero conto e, tutti presi dalla necessità di avere grandezze decimali sia in entrata che in uscita, risolsero il problema progettando una macchina mostruosa che eseguiva per intero in notazione decimale anche le sue operazioni interne. Per molti problemi che si presentano in pratica è necessario trovare il valore approssimato di certi passaggi al limite del calcolo infinitesimale, e poiché esistevano macchine analogiche – i cosiddetti analizzatori differenziali – che contenevano moduli speciali in grado di fornire queste approssimazioni, Eckert e Mauchly inserirono moduli che eseguivano operazioni analoghe anche nel loro ENIAC. Ma la cosa era del tutto superflua, oltre che fuori posto in una macchina digitale; i manuali di analisi spiegano come calcolare questi valori usando solo le quattro operazioni di base dell'aritmetica.

È vero però che Eckert rese un grandissimo servigio all'EDVAC proponendo la linea di ritardo per venire incontro alla necessità di una memoria molto estesa; aveva utilizzato tale sistema lavorando sul radar, e lo conosceva bene. Ma proprio per questo è significativo che nell'appunto che anni dopo avrebbe citato per dimostrare di essere arrivato al concetto di programma interno per primo parlasse di programmazione automatica su dischi in lega metallica senza neanche nominare la linea di ritardo, che conosceva benissimo e che sarebbe stato molto più affidabile come supporto materiale della memoria.

È interessante mettere a confronto il modo in cui von Neumann vedeva il lavoro di programmazione con quello di Turing. Von Neumann lo chiamava «codifica», ed è chiaro che per lui si trattava di una mansione da impiegato che non richiedeva grande intelligenza. Un aneddoto molto significativo racconta che nel centro di calcolo dell'Institute for Advanced Study gli studenti dovevano tradurre a mano le istruzioni per i calcolatori, scritte per essere leggibili da esseri umani, in linguaggio macchina. Un giovane e baldanzoso programmatore propose di costruire un assemblatore che facesse il lavoro automaticamente; pare che von Neumann, arrabbiatissimo, gli avesse risposto che sarebbe stato uno spreco usare un prezioso strumento scientifico per fare del semplice lavoro d'ufficio. Nel rapporto sull'ACE Turing afferma invece che programmare un calcolatore «sarà molto affascinante. Non dovrebbe alla lunga diventare un lavoraccio ingrato, perché qualunque processo che sia davvero meccanico può essere passato alla macchina».[26]

Benché sia la versione di Eckert sia quella di von Neumann circolino ancora, ce n'è un'altra che ultimamente ha guadagnato molto terreno. Secondo questa terza versione von Neumann avrebbe ripreso l'idea di un calcolatore universale utilizzabile nella pratica dall'opera di Turing. Nel 1987 scrissi un articolo in cui difendevo questo punto di vista, e mi sentivo molto isolato.[27] Oggi, il ruolo svolto da Turing durante la guerra nella decrittazione dei messaggi tedeschi è meglio conosciuto, e molti sanno della vergognosa persecuzione che dovette subire per la sua omosessualità. Il dramma *Breaking the Code*, rappresentato a Londra e Broadway e dal quale è stato tratto anche un film andato in onda sulla rete della PBS, mette in scena queste vicende ma anche, in qualche modo, l'importanza delle idee matematiche di Turing.[28] La vicenda è stata raccontata pure da documentari televisivi. E così, incredibile ma vero, il nome di Turing è finito nell'elenco dei venti massimi scienziati e pensatori del Novecento pubblicato il 29 marzo 1999 su «Time»,[29] che ha scritto: «Nei moderni calcolatori confluiscono tante idee e tanti progressi tecnologici che sarebbe temerario dare a una sola persona il merito di averli inventati. Ma rimane il fatto che chiunque batta su una tastiera aprendo una tabella a doppia entrata, o un programma di videoscrittura, lavora su un'incarnazione di una macchina di Turing». Proprio così! Ed ecco un commento su von Neumann: «In pratica tutti gli odierni calcolatori, dalle supermacchine da dieci milioni di dollari a quei minuscoli chip che fanno andare telefoni cellulari e *Furbies*, hanno una cosa in comune: sono tutti "macchine di von Neumann", varianti dell'architettura di base che John von Neumann, proseguendo il lavoro di Alan Turing, elaborò negli anni Quaranta».

LA NAZIONE, GRATA, RICOMPENSA IL SUO EROE

Quando Turing vi arrivò nell'autunno del 1948, Manchester non si era ancora ripresa dalle devastazioni della guerra, e c'erano quartieri che avevano ancora l'aspetto desolato acquisito nei lontani giorni della rivoluzione industriale. Ma ecco le parole con cui un autore che usa come fonte un famoso libro di Friedrich Engels descrive lo squallore delle case operaie nella Manchester del 1844: «Quello che [Engels] ... descrive ... rientra in un contesto sempre uguale di pauperizzazione, degradazione, abbrutimento e deumanizzazione di massa di cui non si era mai visto l'uguale sulla faccia della Terra ... Entrando in questi cortili egli si trova circondato e assalito da sporcizia e lordume rivoltante di cui non esiste l'uguale ... e da quelle che sono senz'altro le abitazioni più orribili che io abbia mai visto finora ... In uno di questi cortili, proprio all'entrata ... c'è un cesso senza porta. Il cesso è così sporco che gli abitanti possono entrarci e uscirne solo guadando pozzanghere di urina ed escrementi in fermentazione».[30]

Naturalmente l'igiene di massa aveva fatto progressi spettacolari nei cento anni trascorsi dai tempi di Engels, e in ogni caso una persona con l'estrazione sociale di Turing non avrebbe mai messo piede in un quartiere operaio. Eppure Turing ebbe a che fare con un membro della classe «inferiore», e questo fu la sua rovina.

Possiamo solo immaginare il risentimento che Turing doveva provare verso i dirigenti dell'NPL, che nella loro inettitudine avevano gettato al vento il suo talento e distrutto quel sogno pieno di fiducia che si era concretizzato nel suo rapporto sull'ACE e nel discorso alla London Mathematical Society. Intanto intorno a lui c'era chi i calcolatori li realizzava; proprio all'Università di Cambridge Maurice Wilkes (1913-) stava dirigendo la costruzione dell'EDSAC, una macchina sul tipo dell'EDVAC, e Wilkes, a differenza di quanto era accaduto a Turing con l'NPL, disponeva di fondi adeguati per il suo progetto. Per Alan doveva essere esasperante ricordare che mentre era all'NPL aveva sprezzantemente liquidato una relazione di Wilkes perché «vicina alla tradizione americana di risolvere le difficoltà servendosi di una gran quantità di apparecchiature in luogo del pensiero». Nel 1949 l'EDSAC, ormai operativo, cominciò a lavorare; ma il fatto che Wilkes e i suoi collaboratori si attribuissero la scoperta della microprogrammazione e delle subroutine (che usavano sistematicamente), cioè di due cose che il suo rapporto sull'ACE descriveva con chiarezza, poteva solo esacerbare lo sconforto di Alan. A Manchester, dove in teoria avrebbe dovuto, in un modo o nell'altro, dirigere tutto il progetto, Williams (si veda sopra, p. 230) gli disse chiaramente che non gli interessavano le idee di un matematico su come costruire il proprio calcolatore. Così il Mark I di Manchester, che cominciò pure a lavorare (con buoni risultati) nel 1949, fu una brillante vittoria della tecnica di Williams, basata sull'impiego di tubi catodici (non costruiti ad hoc, ma già disponibili) per la memoria e subito copiata dai calcolatori americani; ma la sua struttura logica di base veniva, ancora una volta, dal rapporto sull'EDVAC di von Neumann e non da Alan Turing.[31]

Parlando dell'ACE Herman Goldstine afferma che sebbene il progetto fosse «per certi versi attraente, a lungo andare non seppe crescere e la selezione lo eliminò»;[32] dunque insinua che il fallimento fosse dovuto, in qualche modo, a una sorta di selezione naturale, e l'insinuazione è veramente ingiusta. L'ACE pilota in cui avevano preso corpo le idee di Turing funzionava perfettamente, e non c'è motivo di pensare che non avrebbe fatto altrettanto l'ACE completo, se vi fossero state l'organizzazione e le risorse per costruirlo. Ma per capire meglio quale sia il problema è bene inquadrarlo nel contesto di una questione più generale: quali funzioni di un computer dovrebbero essere fornite dallo hardware, e quali dal software? Turing aveva proposto una macchina relativamente semplice nella quale moltissime cose erano affidate al software, ma in compenso il programmatore aveva un forte controllo delle operazioni di base, il che era particolarmente vantaggioso quando bisognava scrivere programmi destinati non al calcolo numerico, ma a quello logico. Si è sempre continuato a discutere di questi pro e contro man mano che l'informatica si sviluppava; l'episodio più recente è quello delle architetture RISC (si veda sopra, p. 232).[33]

Nel 1948, quando Turing arrivò all'Università di Manchester, pochi sapevano qualcosa di quello che aveva fatto durante la guerra, sebbene il governo continuasse a consultarlo. Era stato assunto con l'intesa di occuparsi del Mark I di Williams con funzioni direttive, ma le cose si misero in modo che gli ingegneri, praticamente, facevano tutto da soli, e Turing lavorava sì, ma in modo abbastanza episodico. Così, invece di usare la sua posizione per introdurre qualcuna delle eleganti idee proposte nel rapporto sull'ACE, in modo da rendere facile e piacevole il lavoro dei programmatori, divenne un utente di Mark I e si mise a usare direttamente gli 0 e 1 del linguaggio macchina. Da principio si occupò di alcuni problemi computazionali che aveva in mente da prima della guerra, ma poco dopo passò alla biologia; voleva capire come facessero gli esseri viventi, che partivano come assemblaggi di cellule tutte identiche, a sviluppare quelle forme così varie che si incontrano nel mondo naturale. Da questo problema di morfogenesi emergevano delle equazioni differenziali, e per Turing fu naturale rivolgersi al calcolatore per sapere qualcosa di più della loro soluzione; ma mentre usava la macchina per quel tipo di lavoro bruto sui numeri che aveva cercato di lasciarsi alle spalle, in una serie di articoli divulgativi e conferenze continuava a pensare – anche in modo visionario – alla capacità potenziale dei computer di sviluppare un'intelligenza di tipo umano.

Poco prima del Natale 1951 Turing avviò una breve relazione col diciannovenne Arnold Murray, un ragazzo povero, di famiglia operaia, molto sveglio, che era in libertà vigilata, essendosi fatto arrestare per un furtarello da quattro soldi. Alan lo invitò a casa sua, che al ragazzo dovette sembrare una reggia; ma una sera (era passato meno di un mese da Natale), rientrando, scoprì che la sua abitazione era stata svaligiata e ne rimase sconvolto, sebbene il valore complessivo degli oggetti rubati non superasse le cinquanta sterline. Risultò che Murray conosceva il ladro, un certo «Harry», che evidentemente era convinto di non correre rischi derubando un omosessuale che con ogni probabilità non avrebbe osato rivolgersi alla polizia. Harry pensava che un uomo prudente, nei panni di Turing, non avrebbe mai fatto una simile sciocchezza. Ma si sbagliava.

Per la polizia fu facile ricostruire cosa c'era stato fra lui e Arnold, e quando venne interrogato Alan non negò; pensava che non vi fosse nulla di vergognoso o ingiusto nei suoi impulsi sessuali o nel soddisfarli senza fare del male a nessuno. Ma la legge, in ogni caso, era chiarissima: Turing e Murray avevano compiuto atti di «grossolana indecenza» punibili col carcere fino a due anni. Il giudice cui venne affidato il caso, per ragioni che a lui sembravano umanitarie, consentì a Turing di evitare il carcere a patto di farsi fare, per un anno, iniezioni di ormoni che avrebbero indebolito i suoi impulsi sessuali. Si trattava di estrogeni, e – a parte i loro effetti sull'impulso sessuale – Turing si vide crescere il seno.

Nell'ottobre del 1938 Alan aveva visto *Biancaneve e i sette nani* ed era stato «molto impressionato dalla scena in cui la strega malvagia tenendo una mela appesa a un filo sopra un calderone in cui ribolle la sua velenosa mistura, borbotta:

> Metti, metti la mela nell'intruglio
> Che s'imbeva del sonno della morte».

Alan continuò per giorni a canticchiare quell'incantesimo, quasi fosse una profezia:[34] il 7 giugno 1954 Alan Turing mise fine alla propria vita mordendo mezza mela che aveva tuffato in una soluzione di cianuro. Si sono fatte molte ipotesi sulla causa di questo atto irrimediabile; secondo *Breaking the Code* le autorità volevano impedirgli i viaggi all'estero, il modo più facile per trovare partner sessuali ora che in Inghilterra il sesso era diventato troppo pericoloso. Non è affatto inverosimile che nel clima degli anni Cinquanta il governo avesse da obiettare contro questi viaggi; e dopo la condanna Alan aveva perso l'accesso ai segreti di stato, ma non c'era modo di cancellare dal suo cervello le informazioni segrete che possedeva. Quello che sappiamo con certezza è che un uomo che aveva conosciuto durante un viaggio in Norvegia fu fermato dalla polizia ed espulso quando venne in Inghilterra per fargli visita. È assai verosimile, ahimè, che Alan Turing sia stato perseguitato a morte dal governo di una nazione che, senza clamore, aveva fatto di tutto per salvare.

IX
OLTRE IL SOGNO DI LEIBNIZ

Nel suo discorso ai membri della London Mathematical Society Turing aveva detto: «Mi aspetto che le macchine calcolatrici digitali stimoleranno alla lunga un notevole interesse per la logica simbolica ... Il linguaggio attraverso cui si comunica con queste macchine ... forma una specie di logica simbolica».[1] Il nesso fra logica e calcolo cui allude Turing è stato uno dei temi principali di questo libro, ma è possibile che qualche lettore si chieda: «Come può essere che le due cose siano correlate? Che cos'ha a che fare l'aritmetica col ragionamento?». Una possibile chiave di comprensione è fornita da un'espressione colloquiale inglese nella quale il verbo *to reckon* non ha il significato solito di «calcolare»:

I «reckon» he's sweet-talking her in the moonlight right now.

[«*Immagino* che in questo momento le stia dicendo paroline dolci al chiaro di luna»].

Il malinconico protagonista di un film di serie B parla del rivale, non sapendo di avere già conquistato il cuore di lei. Egli non sta certo pensando all'aritmetica: le sue parole rispecchiano un *ragionamento*, basato sulla presunta conoscenza delle subdole arti del rivale. Il legame tra calcolo e ragionamento suggerito da questo uso della parola *reckon* è tuttavia autentico e profondo: il conteggio numerico è esso stesso una forma di ragionamento, e viceversa i ragionamenti degli esseri umani possono in molti casi essere considerati una forma di calcolo. È molto interessante che questa correlazione, almeno a livello subliminale, venga generalmente percepita. Abbiamo questa percezione ad esempio quando qualcuno viene descritto come una persona «calcolatrice».

Il tentativo di ridurre il ragionamento logico a una serie di regole formali risale ad Aristotele, ed era alla base del sogno leibniziano di un linguaggio computazionale universale, nonché del successo di Turing nel dimostrare che la sua macchina universale poteva svolgere qualsiasi calcolo. Calcolo e ragionamento logico sono due facce della stessa medaglia; e questa intuizione viene usata non soltanto per programmare i calcolatori in modo che sappiano eseguire un'impressionante varietà di compiti, ma anche per progettarli e costruirli.

Nel gennaio del 1999 l'American Association for the Advancement of Science tenne il suo incontro annuale ad Anaheim in California; il tema era *Le sfide del nuovo secolo*. Era una manifestazione importante, con conferenze e simposi sui più svariati argomenti, e mentre scorrevo il programma la mia attenzione fu catturata dal titolo di un convegno: «On the Unusual Effectivness of Logic in Computer Science» (Sull'insolita efficacia della logica nell'informatica). L'argomento era presentato da cinque informatici di primo piano (che sono anche dei logici) che attestavano la correttezza della previsione di Turing. Nel programma si leggeva fra l'altro: «Negli ultimi venticinque anni vi è stata un'interazione estesa, continua e sempre crescente fra logica e informatica. Sotto molti aspetti la logica assicura all'informatica sia un impianto fondazionale unificante sia uno strumento per costruire modelli ... Questo convegno fornisce una visione d'insieme della sorprendente efficacia della logica nell'informatica presentando alcuni dei settori in cui la prima ha svolto un ruolo cruciale per la seconda: l'intelligenza artificiale, la complessità computazionale, il calcolo distribuito, i sistemi di database e la verifica della progettazione».[2]

CALCOLATORI, CERVELLI E MENTI

Nel 1965 un informatico del MIT, Joseph Weizenbaum, scrisse un programma, chiamato ELIZA, che dialogava con l'utente quando questi batteva frasi in inglese sulla tastiera. ELIZA simulava (molto grossolanamente) uno psicoterapeuta della scuola non direttiva. Ecco la trascrizione di una conversazione che ha realmente avuto luogo tra me e una versione di ELIZA:[3]

ELIZA *Piacere di conoscerti. Dimmi per favore qual è il tuo problema.*
MARTIN Il mio problema è indescrivibile.
ELIZA *Perché dici che il tuo problema è indescrivibile?*
MARTIN Perché ogni volta che cerco di descriverlo piango.
ELIZA *E questa è la vera ragione?*
MARTIN Forse no.
ELIZA *Non mi sembri del tutto certo.*
MARTIN Ah, la certezza!
ELIZA *Puoi dirmi qualcosa di più in proposito?*
MARTIN Sì. Ma così arriverò a questioni intime.
ELIZA *Perché sei così convinto?*
MARTIN Cerco di mantenere la mia dignità.

ELIZA *La tua dignità?*
MARTIN Questo tu non lo capiresti.
ELIZA *Stavamo parlando di te, non di me.*
MARTIN Ne ho abbastanza. Arrivederci.
ELIZA *Hai detto di averne abbastanza.*
MARTIN Ho detto arrivederci.
ELIZA *Puoi precisare meglio?*
MARTIN Arrivederci.
ELIZA *Arrivederci. 75 dollari, prego.*

Naturalmente ELIZA non capisce nulla, ma si limita ad applicare un algoritmo molto semplice che risponde ad alcune parole chiave quando queste compaiono, e se mancano ripete l'ultima cosa detta dall'utente. «Tu», ad esempio, è una parola chiave che in generale provoca la risposta STAVAMO PARLANDO DI TE, NON DI ME; ma la frase «Tu sei mia madre» di parole chiave ne contiene due, «tu» e «madre», e provocherà la risposta DIMMI ANCORA QUALCOSA DELLA TUA FAMIGLIA perché «madre» prevale su «tu». La parola chiave «sì» suscita invece la risposta PERCHÉ SEI COSÌ CONVINTO? Osserviamo, infine, che ELIZA risponde alla parola «arrivederci» solo quando questa è in principio di frase.

Nel 1950 Alan Turing pubblicò un saggio ormai classico, *Computing Machinery and Intelligence*, in cui prevedeva che per la fine del secolo vi sarebbero stati programmi di calcolatore capaci di sostenere una conversazione con tale disinvoltura che nessuno sarebbe stato in grado di dire se quello con cui stava chiacchierando era una macchina o un essere umano.[4] Si sbagliava: oggi i programmi interattivi che hanno la pretesa di rispondere a frasi in linguaggio comune sono molto più raffinati di ELIZA nell'elaborare i dati in entrata, ma anche il migliore di loro è ben lontano dalla scioltezza linguistica di un bambino di cinque anni.

Turing cercava un modo per stabilire, senza cacciarsi in un ginepraio filosofico e teologico, se il comportamento di un calcolatore fosse intelligente, e a tale scopo propose un test oggettivo e facile da somministrare: se si riesce a programmare un calcolatore in modo che sappia conversare, su qualsiasi argomento gli venga proposto, talmente bene che nemmeno un interlocutore mediamente intelligente saprebbe dire se sta parlando con una persona o una macchina, allora – diceva Turing – si doveva ammettere che quel calcolatore mostrava una certa intelligenza. Tuttavia siamo lontanissimi dal saper produrre un programma di questo tipo, e molti, ancora oggi, restano convinti che un simile comportamento non sarebbe di per sé intelligente.

Mentre la linguistica computazionale continua a inseguire il Santo Graal di una macchina che sappia finalmente usare il linguaggio ordinario, è naturale che qualcun altro cerchi l'intelligenza nella macchina in campi che non dipendono da esso: per esempio nel gioco degli scacchi. È difficile negare che una persona che giochi discretamente a scacchi pensi in modo intelligente; e, come tutti sanno, sono disponibili sul mercato programmi per il gioco degli scacchi che giocano partite eccellenti. La maggior parte dei giocatori di scacchi a livello amatoriale devono regolarli su un livello di gioco inferiore alle massime prestazioni del programma se non vogliono farsi battere sistematicamente. Nel febbraio del 1996 il calcolatore Deep Blue è riuscito a sconfiggere il campione del mondo Garry Kasparov: dobbiamo concluderne che Deep Blue si è mostrato intelligente? In un articolo scritto nello stile provocatorio che gli è abituale, il filosofo John R. Searle sostiene che propriamente non si può nemmeno dire che Deep Blue giochi a scacchi: «Ecco che cosa succede dentro Deep Blue. Il calcolatore possiede un mucchio di simboli privi di significato che i programmatori usano per rappresentare le posizioni dei pezzi sulla scacchiera e un altro mucchio di simboli, anch'essi privi di significato, che vengono usati invece per rappresentare scelte di mosse possibili. Ma non sa che i simboli rappresentano pezzi e mosse degli scacchi, perché non sa niente».[5]

Per ribadire il concetto Searle ricorre a una variante di una parabola che ora è famosa proprio grazie a lui. La storia originale parla di un uomo, chiuso in una stanza, al quale vengono presentati dei simboli dall'esterno; l'uomo consulta un manuale di istruzioni e decide quali simboli spedire in risposta. Si scopre poi che quel libro è scritto in modo che i simboli che vengono scambiati formino una conversazione in cinese; ma l'uomo, non sapendo il cinese, non ha la minima idea di che cosa rappresentino. Mettendo da parte le conclusioni che si potrebbero trarre da questa bizzarra fantasia, passiamo alla «stanza degli scacchi» di Searle:

«Immaginiamo che un uomo che non sa giocare a scacchi sia chiuso in una stanza e che gli venga fornito un insieme di simboli privi, per lui, di qualsiasi significato. Lui non lo sa, ma quei simboli rappresentano posizioni su una scacchiera. Consulta un libro per sapere che cosa dovrebbe fare e spedisce all'esterno altri simboli, pure senza significato. Possiamo supporre che se il libro delle regole, cioè il programma, è ben congegnato l'uomo vincerà qualche partita, e quelli che stanno fuori diranno: "Quest'uomo capisce gli scacchi, anzi è un bravo scacchista, perché vince". Ma si sbaglierano di grosso, perché l'uomo non capisce niente di scacchi: è solo un calcolatore. E il senso della parabola è questo: se non si può dire che l'uomo capisce gli scacchi solo perché sa far girare il programma scacchistico, non lo si può dire neppure, in base a questo solo motivo, di un qualsiasi altro calcolatore».

Il lettore si sarà già accorto della separazione arbitraria fra software e hardware nell'esempio di

Searle. L'uomo nella stanza funziona come una sorta di rudimentale calcolatore universale, ma un calcolatore nudo, ovviamente, non gioca a scacchi; questo si può dire solo dell'uomo insieme al manuale di istruzioni. Ecco la mia versione della parabola di Searle: «Un bambino precoce la cui madre è una patita degli scacchi si stanca di guardarla giocare e chiede il permesso di fare una partita con lei. La madre acconsente, a patto che muova i pezzi solo quando glielo dice lei e nella casella che gli dice lei. Il bambino obbedisce, e facendo quello che la madre gli sussurra all'orecchio le dà scacco matto. Searle, osservando la scena, conclude che il bambino non sa niente di scacchi e sicuramente non ci sta giocando. Come dargli torto?».

Raccontare storie artificiose per mettere in luce collegamenti che altrimenti potrebbero non essere chiari è una tecnica abituale dei filosofi contemporanei; ma forse non sarà del tutto inutile riportare la stanza degli scacchi alla realtà. Un collega che aveva collaborato dalla progettazione di Deep Thought – il calcolatore scacchista, già molto potente, predecessore di Deep Blue – mi fornì alcuni dati numerici e io calcolai che se lo hardware e il software che costituivano Deep Thought fossero stati organizzati nella forma di un libro (o meglio di una biblioteca) contenente istruzioni eseguibili da un essere umano, ci sarebbero voluti anni per il lavoro di elaborazione necessario per fare una sola mossa. Meglio mettere una famiglia in quella stanza degli scacchi, così quando i genitori moriranno i figli li potranno sostituire – o nessuna partita sarà mai terminata!

Searle afferma che in Deep Blue vi è «un mucchio di simboli privi di significato». Ma se potessimo guardare dentro Deep Blue mentre lavora non vedremmo nessun simbolo, né con significato né senza; al livello dei circuiti vi sono solo elettroni in movimento. Allo stesso modo, se guardassimo dentro il cranio di Kasparov mentre gioca non vedremmo i pezzi degli scacchi, ma neuroni che mandano impulsi. Ancora oggi abbiamo idee molto vaghe su com'è organizzato il cervello per trattare ciò che chiamiamo informazione simbolica, mentre comprendiamo molto meglio com'è organizzato per questo compito il calcolatore, perché a predisporlo sono ingegneri e programmatori. Ma in entrambi i casi processi che hanno luogo, sostanzialmente, a livello molecolare sono integrati in schemi che è utile concepire come manipolazioni simboliche. Searle dice che i simboli di Deep Blue sono privi di significato. Ora, che «significa» un pedone o un cavallo? La domanda è inutile.

Searle dà molta importanza al fatto che Deep Blue non «sappia» di giocare a scacchi, e addirittura sottolinea che non sa nulla; ma con ogni probabilità quelli che di mestiere fanno gli ingegneri della conoscenza sosterrebbero che sa un sacco di cose: per esempio, in quali caselle può andare un alfiere che sta in una posizione data. Tutto dipende dal significato che diamo a «sapere». Ma ammettiamo pure che Deep Blue non sappia di giocare a scacchi. Ne possiamo concludere che effettivamente *non* ci sta giocando? Consideriamo quest'altro esempio: «Gli antropologi che studiano gli Xlupu della Nuova Guinea settentrionale hanno scoperto quella che di sicuro è la più grande coincidenza di tutti i tempi. Pare che gli Xlupu, pur essendo rimasti totalmente isolati fino all'anno scorso, celebrino una cerimonia religiosa nel corso della quale certe coppie compiono un rituale simbolico che equivale esattamente al nostro gioco degli scacchi. Non usano scacchiera o pezzi, ma fanno disegni molto complicati dentro dei riquadri di sabbia. Il dottor Splendid, capo della prima spedizione antropologica che ha incontrato gli Xlupu, è riuscito a vedere un equivalente della successione delle mosse di una partita a scacchi nelle figure che venivano disegnate, ma solo perché egli stesso è un appassionato scacchista dilettante».

Questi Xlupu giocano a scacchi? Sicuramente non *sanno* di farlo. «Ah, ma gli Xlupu sono coscienti e Deep Blue non lo è!» potrebbe rispondere Searle. In effetti la questione se una macchina dotata di un certo programma possa mai essere cosciente ha avuto un ruolo centrale nella discussione di Searle e altri. A prescindere dagli scenari futuri, bisogna certamente riconoscere che Deep Blue non è cosciente.

La coscienza è per noi un modo fondamentale di esperire quella cosa unica che è la nostra individualità, ma la conosciamo solo dall'interno. Abbiamo esperienza della nostra coscienza, ma non di quella altrui. Io vivo la mia coscienza come una conversazione interiore; mia moglie mi assicura che la sua è dominata da immagini visive. La mia coscienza e quella di mia moglie sono veramente due entità dello stesso tipo? E ammesso che lo siano, che genere di entità? È al servizio di quale scopo? Mentre scrivo cerco la parola giusta, ed ecco che quella parola (quando ho fortuna) affiora alla coscienza dalle profondità sottostanti. Ma io non ho idea di come riesca il mio cervello a fare una cosa così intelligente; e la verità nuda e cruda è che il fenomeno della coscienza resta a tutt'oggi un mistero.

Turing e von Neumann furono mossi a paragonare il calcolatore al cervello umano per un'ottima ragione: sapendo che gli esseri umani sono capaci di pensare secondo schemi molto diversi, congetturarono che la nostra capacità di fare tante cose diverse sia dovuta alla presenza, nel nostro cervello, di un calcolatore universale. Ecco perché von Neumann fu tanto colpito da una teoria dei neuroni artificiali mentre si accingeva a progettare l'EDVAC. E i calcolatori universali possono soltanto eseguire algoritmi. «Gli esseri umani fanno ben poco calcolo nel senso letterale del termine» sostiene Searle. «Passiamo pochissimo del nostro tempo a far funzionare algoritmi». Ne è proprio sicuro? Quando ci chiedono: «Ha mai letto niente di Charles Dickens?», la risposta (sì o no) emerge immediata dal profondo. Come ci riusciamo? Non ne abbiamo idea, ma l'ipotesi che vi sia di mezzo un qualche tipo di processo algoritmico che accede all'informazione richiesta partendo da una base dati che abbiamo nel cervello è, almeno a prima vista, molto attraente. Le ricerche sul modo in cui un calcolatore rielabora i dati visivi grezzi che gli arrivano da una o più telecamere fanno molto riflettere sul tipo di processo necessario per produrre quell'immagine visiva così netta che ci viene fornita dal nostro cervello a partire dai dati grezzi che dalla retina vanno al cervello stesso. Ora, noi non sappiamo che il nostro cervello fa queste cose seguendo degli algoritmi, ma sicuramente non sappiamo nemmeno che *non* le fa così.

Roger Penrose, illustre matematico e fisico matematico che ha scritto pagine bellissime sulla geometria dell'universo, si è chiesto se il funzionamento della mente umana sia fondamentalmente algoritmico. Adducendo il teorema d'incompletezza di Gödel, ha risposto con un energico «No!». Un modo per formulare il teorema di Gödel è il seguente:

Dato un algoritmo che produce, uno dopo l'altro, enunciati veri sui numeri naturali possiamo sempre ottenere un altro enunciato vero sui numeri naturali, che chiameremo «la proposizione di Gödel», che non è generato da questo algoritmo.[6]

Secondo Penrose, nessuno specifico algoritmo che venga proposto come equivalente al funzionamento della mente sarà mai adeguato allo scopo perché con un atto di «intuito» possiamo vedere che la proposizione di Gödel per quell'algoritmo è vera. Questo argomento è profondamente sbagliato per una ragione che Turing aveva illustrato, quarant'anni prima, nella sua conferenza del 1947 alla London Mathematical Society. Turing aveva sottolineato che il teorema di Gödel è applicabile solo ad algoritmi che generano esclusivamente proposizioni vere, mentre nessun matematico umano può rivendicare l'infallibilità. Tutti commettiamo errori! Perciò nel teorema di Gödel non c'è niente che impedisca alle capacità matematiche della mente umana di essere equivalenti a un processo algoritmico che produca enunciati sia falsi sia veri.[7]

Searle e Penrose respingono l'ipotesi che la mente umana, nei suoi aspetti essenziali, equivalga a un calcolatore, ma entrambi partono dal presupposto che – qualunque cosa sia – la nostra mente sia prodotta dal cervello, il quale è soggetto alle leggi della fisica e della chimica. Per parte sua Kurt Gödel era dispostissimo a credere che il cervello fosse effettivamente un calcolatore, ma rifiutava l'idea che non vi sia una mente oltre ciò che può fare il cervello umano. Qui la maggior parte dei lettori si renderà conto che al centro delle sue preoccupazioni c'era il classico problema mente-corpo. La sua convinzione che la mente dell'uomo sia, in qualche modo, indipendente dalla sua esistenza fisica era una forma di quello che va sotto il nome di dualismo cartesiano.[8]

La discussione ci ha portati molto più in là del sogno di Leibniz, in un regno che sta tra filosofia e fantascienza. Sicuramente, se pensiamo a che cosa sono diventati i calcolatori dai tempi dei rapporti sull'EDVAC e l'ACE, ci rendiamo conto che è saggio evitare previsioni azzardate su quello che potranno e non potranno fare in futuro.

EPILOGO

Abbiamo seguito le vicende di un gruppo di brillanti innovatori, vissuti nell'arco di tre secoli, ognuno dei quali si è interessato, in un modo o nell'altro, della natura della ragione umana. La somma dei loro contributi individuali ha prodotto la matrice intellettuale dalla quale è uscito il calcolatore moderno. A parte Turing, nessuno di loro ha mai intravisto questo esito della sua opera. Leibniz guardava lontano, ma non fino a questo punto. Boole non poteva certo immaginare che la sua algebra della logica sarebbe stata usata per progettare complessi circuiti elettronici. Frege sarebbe stato stupito di scoprire che l'equivalente delle sue regole logiche era stato incorporato in programmi di deduzione automatica. Cantor, sicuramente, non immaginò mai le ramificazioni che avrebbe avuto il suo metodo della diagonale. Il programma di Hilbert, che doveva rendere sicuri i fondamenti della matematica, puntava in una direzione molto diversa. E Gödel, tutto preso com'era dalla vita della mente, non si occupò mai di applicazioni a congegni meccanici.

Questa storia vuole sottolineare la potenza delle idee e la vanità di ogni pretesa di prevedere dove ci porteranno. I duchi di Hannover credevano di sapere come Leibniz doveva occupare il suo tempo: lavorando alla storia della loro famiglia. Ma anche oggi accade fin troppo spesso che quelli che forniscono agli scienziati le risorse necessarie per vivere e lavorare cerchino di indirizzarli nelle direzioni che secondo loro hanno più probabilità di produrre rapidamente risultati. Tuttavia un simile tentativo non solo risulterà, verosimilmente, vano nei tempi brevi, ma – e questo è più importante – scoraggiando le ricerche prive di utilità immediata impoverirà il nostro futuro.

NOTE

I riferimenti alla Bibliografia vengono dati con autore e anno di pubblicazione. Ove di un'opera esista la traduzione italiana, i numeri di pagina si riferiscono a quest'ultima.

INTRODUZIONE

1. La citazione è presa da Ceruzzi (1983), p. 43. Howard Aiken (1900-1973) fondò lo Harvard Computation Laboratory ed ebbe un ruolo di primo piano nella progettazione e costruzione di grandi macchine calcolatrici a Harvard negli anni Quaranta e nei primi anni Cinquanta.

2. Da un discorso alla London Mathematical Society (Turing, 1992, p. 112). Si parla di Alan Turing nei capitoli VII e VIII di questo libro.

I. IL SOGNO DI LEIBNIZ

1. Per le notizie biografiche su Leibniz mi sono basato soprattutto su Aiton (1985).

2. L'ottimistica visione leibniziana diventò il bersaglio dell'ironia di Voltaire, che in *Candide* la mise in caricatura con la figura del dottor Pangloss.

3. Per la *Dissertatio de arte combinatoria* (nell'originale latino) si veda Leibniz (1849-1863), vol. V, pp. 8-79.

4. Si parla dell'attività matematica di Leibniz a Parigi in Aiton (1985) e, più diffusamente, in Hofmann (1974).

5. Pascal nacque il 19 giugno 1623 a Clermont-Ferrand, in Francia. Fu tra i fondatori della teoria della probabilità, nonché fisico, matematico e pensatore religioso fecondissimo. L'invenzione, intorno al 1642, della macchina calcolatrice gli diede grande notorietà. Morì nel 1662.
6. G.W. Leibniz, *Machina arithmetica in qua non additio tantum et subtractio sed et multiplicatio nullo, divisio vero paene nullo animi labore peragantur*, 1685; trad. ingl. in Smith (1929), pp. 173-81.
7. Riguardo agli scritti di Leibniz sulle macchine per ragionare e risolvere equazioni si veda Couturat (1901), p. 115.
8. Benché la teoria ondulatoria sia stata universalmente accettata, nel Novecento, con l'avvento della meccanica quantistica, si è visto che Newton e Huygens avevano entrambi ragione, nel senso che ciascuno aveva afferrato una caratteristica essenziale della luce.
9. In effetti $\pi/4$ è l'area di un cerchio di raggio 1/2.
10. I dati numerici relativi alla convergenza a $\pi/4$ della serie di Leibniz furono ottenuti scrivendo un programma in Pascal e facendolo girare su un PC con CPU 486 a 33 MHz. Si impiegarono cinquanta secondi per un milione di termini e otto minuti per dieci milioni. Due anni dopo il programma fu fatto girare su una macchina con Pentium a 200 MHz e i tempi si ridussero, rispettivamente, a quattro e quaranta secondi.
11. Per esempio, determinare un volume o un centro di gravità è un problema del primo tipo, calcolare l'accelerazione o (in economia) la felimità, del secondo.
12. Il simbolo di integrale $\int$ è una S modificata che vorrebbe richiamare l'idea di una «somma», e analogamente il simbolo di derivazione *d* vorrebbe richiamare la «differenza».
13. I lettori interessati ai dettagli matematici della creazione del calcolo infinitesimale a opera di Leibniz e Newton, nonché dei loro predecessori, apprezzeranno l'ottima trattazione di Edwards (1979). Consiglio anche Bourbaki (1969), pp. 207-49, per un'eccellente esposizione dell'evoluzione storica del calcolo.
14. Un'altra storia interessante (ma fuori posto in questo

libro) sul calcolo differenziale e integrale di Leibniz riguarda l'uso sistematico che egli fece degli *infinitesimi*. Questi venivano pensati come numeri positivi talmente piccoli che per quanto si fosse continuato a sommarne uno a se stesso non si sarebbe mai raggiunto il valore 1 (o anche 0,0000001). La legittimità di tali grandezze venne contestata fin dall'inizio: il vescovo Berkeley soleva dire, sarcasticamente, che si trattava di «fantasmi di quantità trapassate». Alla fine dell'Ottocento tutti i matematici riconoscevano che l'uso degli infinitesimi non aveva giustificazione (ma fisici e ingegneri continuavano a impiegarli). Per un'analisi dei metodi infinitesimali di Leibniz e della loro riabilitazione nel Novecento a opera del logico A. Robinson si veda Edwards (1979). L'importante contributo di Robinson è illustrato anche in Davis e Hersh (1973).

15. Aiton (1985), p. 53.

16. Mates (1985), p. 27; rimandiamo alla stessa fonte (pp. 26-27) per ulteriori notizie su queste due notevolissime donne, per informazioni sulle idee di Leibniz a proposito delle capacità intellettuali femminili e per qualche altro rimando bibliografico.

17. Couturat (1901), p. 83. La lettera a L'Hôpital ha la data del 28 aprile 1693. Sul «filo d'Arianna» si veda Bourbaki (1969), p. 16.

18. La lettera reca la data del dicembre 1678 (in Leibniz, 1849-1863, vol. I, pp. 182-88).

19. Leibniz (1875-1890), vol. VII, p. 200.

20. Parkinson (1966), p. 105.

21. G.W. Leibniz, *Scritti di logica*, trad. it. a cura di F. Barone, vol. II, Laterza, Roma-Bari, 1992, pp. 374-89. Sul calcolo logico di Leibniz si veda Lewis (1960), pp. 297-305. Si noti che al posto del simbolo = Leibniz usava ∞. L'interessante articolo di Swoyer (1994) ricostruisce accuratamente questo sistema da un punto di vista contemporaneo.

22. Per una discussione sui tentativi di Leibniz di andare oltre l'analisi di Aristotele si veda Mates (1985), pp. 178-83.

23. Huber (1951), pp. 267-69.

24. Aiton (1985), p. 212.

25. Queste notizie provengono (in parte) dall'opera di Kurt Huber (Huber, 1951), professore di filosofia all'Università di Monaco, che la ultimò in carcere mentre era in attesa d'essere giustiziato dai nazisti. Aveva appoggiato l'iniziativa di alcuni suoi studenti, componenti il gruppo clandestino della Rosa Bianca, condannati a morte e decapitati per aver distribuito volantini contro il regime. Oggi un cortile della Luwig-Maximilian Universität porta il suo nome. (Sono grato a Benson Mates per le informazioni sull'eroica testimonianza del professor Huber).

II. BOOLE TRASFORMA LA LOGICA IN ALGEBRA

1. Le notizie sull'amicizia di Leibniz con la principessa Caroline e sulla sua corrispondenza con Clarke sono tratte da Aiton (1985), pp. 232 e 341-46, nonché dalle voci su Caroline e Clarke riportate nella *Encyclopaedia Britannica*.

2. Le notizie biografiche su George Boole sono tratte principalmente da MacHale (1985).

3. *Ibid.*, pp. 17-19.

4. *Ibid.*, p. 19.

5. *Ibid.*, pp. 30-31.

6. Barret-Ducrocq (1992), a proposito di un analogo istituto londinese, narra molte storie di questo tipo.

7. MacHale (1985), pp. 24-25.

8. *Ibid.*, p. 41.

9. Tra le leggi più importanti dell'algebra vi sono le leggi *commutative* dell'addizione e della moltiplicazione

$$x+y=y+x \qquad xy=yx$$

e la legge *distributiva*

$$x(y+z)=xy+xz$$

(Seguendo le normali convenzioni algebriche, scriviamo xy in luogo di $x \times y$).

10. La moltiplicazione (nel senso di applicazione consecutiva) di due operatori differenziali non sempre rispetta la legge commutativa.

11. MacHale (1985), pp. 59-62 e 64-66. Oltre al lavoro in cui usava i metodi del calcolo infinitesimale, Boole pubblicò sul «Cambridge Mathematical Journal» del 1842 un articolo in due parti che può essere considerato l'atto di nascita di un ramo nuovo e importante dell'algebra, la teoria degli invarianti; ma dopo questo primo contributo non lavorò più sull'argomento. Torneremo a occuparci di invarianti nel capitolo su David Hilbert.

12. L'atteggiamento lassista di Boole verso le dimostrazioni che facevano uso di passaggi al limite contrasta con i tentativi in atto in quegli anni di rifondare tutta questa tematica in modo rigoroso; al lettore interessato suggeriamo la lettura di Edwards (1979), soprattutto del capitolo 11.

13. Il filosofo scozzese William Hamilton non va confuso col matematico irlandese (suo contemporaneo) William Rowan Hamilton.

14. Boole (1854/1958), pp. 47-48.

15. L'equazione $xx = x$ di Boole è paragonabile alla $A \oplus A = A$ di Leibniz. In entrambi i casi un'operazione pensata per essere applicata a due oggetti dà come risultato, quando è applicata a un oggetto e ancora a quell'oggetto, di nuovo quell'oggetto.

16. Daly (1966), Kinealy (1996).

17. MacHale (1985), p. 173.

18. *Ibid.*, p. 92.

19. *Ibid.*, p. 107.

20. *Ibid.*, pp. 240-43.

21. *Ibid.*, p. 111.

22. *Ibid.*, pp. 252-76.

23. La notazione moderna per l'intersezione è $x \cap y$, e l'insieme vuoto si indica in genere con la lettera scandinava $\emptyset$ anziché con 0. Ma per Boole quella notazione era importante perché facilitava le connessioni con l'algebra ordinaria.

24. Per Boole l'operazione + si applicava solo a classi prive di elementi comuni. Seguendo l'uso moderno, lasceremo cadere questa restrizione. Così, $x+y$ sarà la classe degli oggetti che appartengono a x o a y o a entrambe, cioè quella che oggi chiamiamo *unione* di x e y, indicata con $x \cup y$. Inoltre Boole limitava la notazione $x - y$ ai soli casi in cui la classe indicata con y era parte della classe indicata con x, ma nemmeno questa restrizione è indispensabile.

25. Boole (1854/1958), pp. 76-77.

26. Come sottolinea Boole, algebricamente la dimostrazione della validità di un sillogismo comporta l'*eliminazione* di una variabile da due equazioni simultanee in tre variabili.

Pur rendendosi perfettamente conto che nella sua algebra proposizioni della forma «Tutti gli X sono Y» potevano essere rappresentate da $X(1-Y)=0$, Boole preferì la forma $X = vY$, dove v era, nelle sue parole, un «simbolo indefinito». Sembra che l'idea gli fosse stata suggerita dal matematico Charles Graves (MacHale, 1985, p. 70); ma era un'idea veramente disastrosa, che complicava inutilmente il suo sistema.

27. Il metodo seguito da Boole per collegare le proposizioni secondarie alla sua algebra delle classi consiste nel tener conto del *tempo*: a ogni proposizione egli associa infatti la *classe* degli istanti in cui tale proposizione è vera. Per dire che X è vera Boole soleva scrivere $X = 1$, intendendo che la classe degli istanti in cui essa è vera abbraccia l'intera durata temporale considerata. Analogamente $X = 0$ significa che X è falsa perché non esistono istanti in cui sia vera. Data una proposizione $X \& Y$ che esprime la verità tanto di X quanto di Y, l'insieme degli istanti in cui essa è vera coincide con l'insieme intersezione XY. Infine, perché sia vera la proposizione «se X, allora Y» si richiede che in tutti gli istanti in cui è vera X sia vera anche Y, cioè che non vi sia alcun istante in cui X è vera e Y falsa. L'equazione è $X(1-Y)=0$ (cfr. Boole, 1854/1958, pp. 229-31).

28. *Ibid.*, pp. 261-96 (la citazione è alla p. 267).

29. Un'organizzazione internazionale, la Association for

Symbolic Logic, pubblica due riviste trimestrali e tiene riunioni regolari per la diffusione delle nuove ricerche. Anche i logici europei hanno le loro riunioni annuali. Alle conferenze dell'IEEE Symposium on Logic in Computer Science e dell'European Association for Computer Science Logic si presentano ogni anno nuovi lavori sulla relazione tra logica e informatica.

III. FREGE: DALLA GRANDE CONQUISTA AL CROLLO

1. Sulla lettera di Russell, la risposta di Frege e i successivi commenti di Russell si veda van Heijenoort (1967), pp. 124-28.

2. Sul diario di Frege e i commenti di Michael Dummett si veda Frege (1996).

3. Ho un debito straordinario verso il professor Lothar Kreiser dell'Università di Lipsia, che con grande cortesia ha soddisfatto le mie curiosità su Frege nonostante le sue energie fossero, mi ha spiegato, completamente assorbite da questioni connesse alla riunificazione tedesca. È stata utile anche le breve biografia fornita da Bynum (1972).

4. Ho trovato in Craig (1978) un'eccellente fonte di notizie sulla storia tedesca. Sulle origini della prima guerra mondiale si vedano anche Geiss (1967) e Kagan (1995). Sono arrivate fino a noi diverse cartoline di Frege a Wittgenstein, che durante la guerra era nell'artiglieria austriaca come osservatore, dalle quali emerge – e la cosa non sorprende – un Frege molto patriottico (Frege, 1976).

5. Frege (1996).

6. Il partito di centro era di orientamento cattolico. L'epiteto «oltremontano» si riferisce a presunte influenze d'oltralpe, ossia di Roma.

7. Frege (1996).

8. Si vedano Sluga (1993), Frege (1976).

9. Nel 1979, in occasione di un congresso per il centenario della pubblicazione dell'opera, fui invitato a illustrarne le conseguenze per l'informatica. Fu il mio primo as-

saggio di quello studio del retroterra storico della logica e dell'informatica da cui è nato questo libro.

10. Una eccellente traduzione inglese della *Begriffsschrift* si trova nel saggio di van Heijenoort (1967), pp. 1-82, da cui è tratta la citazione (p. 1); si veda anche Bynum (1972), pp. 101-66 [per la traduzione italiana si veda Frege (1879), pp. 99-206].

11. Questi simboli sono quelli oggi comunemente usati, non quelli originali di Frege (ovviamente, l'intuizione decisiva fu nel capire che cosa bisognava simbolizzare, più che nella scelta di questo o quel segno). La notazione di Frege ha avuto scarso successo, sicuramente per complicazioni tipografiche, ma soprattutto perché quella di Giuseppe Peano, nell'adattamento di Bertrand Russell, ha finito col diventare molto più conosciuta.

12. Scrive lo stesso Frege: «Quello che volevo creare non era un semplice *calculus ratiocinator*, ma una *lingua characteristica* nel senso di Leibniz», citato in van Heijenoort (1967), p. 2. Si veda anche Kluge (1977).

13. Questa regola è nota – con un termine coniato dagli scolastici nel dodicesimo secolo – come *modus ponens*.

14. Quella che noi chiamiamo logica di Frege è detta in genere *logica del primo ordine* per distinguerla da quei sistemi nei quali i quantificatori $\forall$ e $\exists$ vengono applicati non solo a individui, ma anche a proprietà. Ecco un esempio di enunciato della cosiddetta *logica del secondo ordine*:

$$(\forall F)(\forall G)\Big[\big((\forall x)\big(F(x) \supset G(x)\big)\big) \supset (\exists x)\big(F(x) \supset (\exists x)G(x)\big)\Big]$$

In realtà Frege andò oltre il primo ordine e prese in considerazione anche la quantificazione delle proprietà, per cui chiamando «logica di Frege» solo la logica del primo ordine non ci esprimiamo in modo del tutto corretto.

15. L'espressione inglese *all purpose computer* non è mai stata realmente tradotta in italiano. Introduciamo qui la locuzione «calcolatore generale» per denotare un calcolatore le cui capacità non siano specificate, ma neanche limitate. Dal capitolo VII in avanti si parlerà del «calcola-

tore universale», che dà il titolo al libro e conferisce valore scientifico alla denominazione prescientifica calcolatore generale [*N.d.T.*].

16. È universalmente riconosciuto, dai matematici d'oggi, che per mezzo di coordinate numeriche si possa ridurre all'aritmetica anche la geometria, ma Frege fu sempre dell'idea che quest'ultima dovesse venir considerata una disciplina a parte. Ringrazio Patricia Blanchette per avermi fatto notare questo aspetto del pensiero di Frege e per altre utili osservazioni su questo paragrafo.

17. A rigore, questa concezione di «numero» è più vicina a quella proposta da Bertrand Russell che all'illustrazione originale di Frege; ma è comunque abbastanza vicina a quest'ultima per mostrare perché fosse vulnerabile al paradosso di Russell.

18. Una ricerca molto interessante, ancora in corso mentre scrivevo questo libro, ha dimostrato che buona parte del programma fregeano di sviluppo logico dell'aritmetica (Boolos, 1995) può essere salvata.

19. Frege (1892a).

20. Cfr. Dummett (1981), Baker e Hacker (1984).

21. Ai fini della chiarezza, è importante riuscire a definire esattamente il significato delle locuzioni usate nei linguaggi di programmazione, a fornire cioè la *semantica* di tali linguaggi. Un approccio molto studiato al problema è quello della *semantica denotazionale*, basata in ultima analisi sulle idee di Frege. Si veda Davis, Sigal e Weyuker (1994), pp. 465-556.

IV. CANTOR: UNA DEVIAZIONE ATTRAVERSO L'INFINITO

1. Rucker (1982), p. 3.

2. Citato in Dauben (1979), p. 124. L'originale di Leibniz, in francese, si trova in Cantor (1932), p. 179.

3. Citato in Dauben (1979), p. 120.

4. Frege (1892b), p. 272. Su questa recensione dell'opera di Cantor si parlerà più diffusamente nel seguito.

5. Per le notizie biografiche su Cantor mi sono basato su Grattan-Guinness (1971), Purkert-Ilgauds (1987) e Meschkowski (1983).

6. Meschkowski (1983), p. 1.

7. Il grande interesse dei matematici e dei fisici per le serie trigonometriche fu stimolato dalla sorprendente scoperta, fatta all'inizio dell'Ottocento dal matematico francese Fourier, che sotto condizioni ben poco restrittive esse potevano convergere a qualsiasi limite, o quasi. Come esempio di serie trigonometrica consideriamo

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots$$

Tale serie ha la notevole proprietà di convergere a $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{6}\pi^2$ per qualsiasi valore di x compreso fra 0 e 2π (ove l'«angolo» x è misurato in radianti). Ponendo x uguale a 0 otteniamo

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

cioè un risultato che, come la serie di Leibniz per $\pi/4$ mette in relazione π con i numeri naturali; in questo caso, con i quadrati perfetti:

$$1 \times 1 = 1,\ 2 \times 2 = 4,\ 3 \times 3 = 9,\ 4 \times 4 = 16,\ 5 \times 5 = 25, \ldots$$

8. È la stessa idea invocata da Frege nel suo fallito tentativo di definire che cosa sia il «numero».

9. Euclide (1970), p. 74.

10. Leibniz (1875-1890), vol. I, p. 338. Traduzione dall'originale latino di A. Manaster Ramer.

11. Come tutti sanno dalla scuola elementare, frazioni diverse possono rappresentare lo stesso numero: ad esempio

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots$$

Pertanto la corrispondenza biunivoca tra numeri naturali e frazioni qui presentata riguarda *le frazioni come simboli*, e non i numeri per cui tali simboli stanno. A questo però si rimedia facilmente: basta togliere dal novero delle frazioni tutte quelle non ridotte ai minimi termini.

12. L'esistenza di numeri trascendenti era stata provata trent'anni prima, per una via completamente diversa, dal francese Joseph Liouville; questi era riuscito a dimostrare che un numero la cui espansione decimale contiene certe successioni molto lunghe di zeri è necessariamente trascendente. Il metodo di Liouville si può applicare, per esempio, al numero

$$0{,}1010000\underbrace{1000000000000000000000000000}_{27}$$

$$1\underbrace{000\ldots0}_{64}10\ldots$$

nel quale i blocchi successivi di zeri inseriti tra due numeri 1 sono lunghi rispettivamente $1^1 = 1$, $2^2 = 4$, $3^3 = 27$, $4^4 = 256$, e così via. All'epoca in cui Cantor scrisse il suo articolo la dimostrazione della trascendenza di π era ancora lontana un decennio, e la trascendenza di $2^{\sqrt{2}}$ è stata dimostrata solo nel 1934.

13. Grattan-Guinness (1971), p. 358.

14. Oggi la notazione di Cantor per i numeri cardinali, $\overline{\overline{M}}$, non è molto usata. In genere si preferisce scrivere $|M|$.

15. Si noti l'uso di parentesi *graffe* {...} per indicare che gli oggetti elencati formano un insieme.

16. In effetti, nel caso di insiemi infiniti l'asserzione che di due numeri cardinali diversi uno debba essere più grande dell'altro non è così ovvia.

17. Forse per questo motivo si diffuse l'idea che Cantor fosse ebreo (in realtà i suoi genitori erano cristiani ed egli ebbe un'educazione luterana). Durante il nazismo, la possibile ascendenza ebraica di Cantor veniva ritenuta di una qualche importanza ai fini dell'accettabilità o meno della sua matematica. In effetti pare che nel ramo paterno vi fosse un antenato ebreo, espulso dal Portogallo nell'ultimo decennio del quindicesimo secolo. In una lettera del 30 aprile 1895, Cantor spiegava così il motivo della sua scelta: «Mi sembrava che per questi scopi gli altri alfabeti fossero troppo sfruttati». (Ringrazio Sherman Stein per avermi mostrato una copia della lettera).

18. Per capire come mai l'insieme di tutti gli insiemi di numeri naturali ha lo stesso numero cardinale dell'insieme dei numeri reali è utile considerare la scrittura dei numeri nel sistema binario, nel quale esistono due sole cifre, 0 e 1. Quando scriviamo $1/3 = 0{,}33333$ ..., ciò significa semplicemente

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$$

Nel sistema binario i numeri reali positivi minori di 1 si possono rappresentare come successioni infinite di 0 e 1. Ad esempio

$$\frac{1}{4} = 0{,}0100000000\ldots$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}0101010101\ldots$$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}0101000101\ldots$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}1011010100\ldots$$

Qui $1/3 = 0{,}0101010101\ldots$ significa

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots$$

dove i denominatori sono potenze non di 10, ma di 2.

Ora, dato un qualunque insieme di numeri naturali, è possibile associare ad esso un solo numero reale nel seguente modo: generiamo una successione di 0 e 1, scrivendo 1 in n-esima posizione se n è un numero dell'insieme dato e 0 se non lo è. Partendo ad esempio dall'insieme dei numeri pari, otteniamo 0,01010101 ..., cioè, come già sappiamo, 1/3; partendo invece dall'insieme dei numeri dispari, otteniamo 0,10101010 ..., cioè 2/3.

Ciò mostra che l'insieme di tutti gli insiemi di numeri naturali ha lo stesso numero cardinale dell'insieme dei numeri reali compresi fra 0 e 1. Ma Cantor riuscì anche a dimostrare (e non è molto difficile) che quest'ultimo insieme ha lo stesso numero cardinale dell'insieme di tutti i reali.

C'è però un piccolo intoppo tecnico che, in tutta onestà, non posso non ricordare: certi numeri razionali avranno due rappresentazioni binarie distinte, e quindi corrisponderanno a due insiemi diversi di numeri naturali. Per esempio,

$$\frac{1}{2} = 0{,}1000000 \ldots$$
$$= 0{,}0111111 \ldots$$

Dunque il numero reale 1/2 corrisponde sia all'insieme formato dal solo numero 1 sia all'insieme di tutti i numeri naturali eccetto 1; ma la difficoltà, pur rovinando la nostra bella corrispondenza uno a uno, può essere superata ove si consideri che i numeri per i quali ciò si verifica – i numeri razionali – costituiscono un insieme di cardinalità $\aleph_0$, ossia un insieme numerabile.

19. Come osservò lo stesso Cantor, l'insieme di tutti gli insiemi di numeri reali ha lo stesso numero cardinale dell'insieme di tutte le *funzioni* da numeri reali a numeri reali.

20. Si vedano Grattan-Guinness (1971) e Dauben (1979). La dottoressa Barbara Rosen mi ha cortesemente fornito il suo parere professionale su questo argomento.

21. Ringrazio Michael Friedman per avermi aiutato a proposito di Kant e argomenti affini (ma egli non ha alcuna responsabilità per il mio attacco a Hegel).

22. Cantor (1932), p. 382.

23. Frege (1892b). Volentieri riconosco il grande aiuto prestatomi da Egon Börger, William Craig, Michael Richter e Wilfried Sieg nel tradurre questo passo, nonché quello di Cantor citato alla nota precedente.

V. HILBERT VOLA AL SOCCORSO

1. Per le notizie su Hilbert ho utilizzato la biografia hilbertiana di C. Reid (1986), il saggio biografico di O. Blumenthal in Hilbert (1935/1970), pp. 388-429, e il saggio-necrologio di H. Weyl (1944).

2. Come molti lettori sapranno, $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. (Ciò significa, come ho spiegato nel capitolo precedente, che non può essere espresso come una frazione avente a numeratore e denominatore numeri naturali, o anche, equivalentemente, che la sua rappresentazione decimale è aperiodica. Usando tale proprietà è possibile dare un'elegante *dimostrazione non costruttiva* del seguente teorema: ***esistono numeri irrazionali a e b tali che a^b è razionale***).

Nel corso della dimostrazione la lettera q starà per $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ora, q o è razionale o è irrazionale. Se è razionale abbiamo subito il nostro assunto ponendo $a = b = \sqrt{2}$; se è irrazionale, ponendo $a = q$ e $b = \sqrt{2}$, otteniamo

$$a^b = q^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

e troviamo ancora una volta un numero irrazionale che, elevato a un esponente anch'esso irrazionale, dà come risultato un numero razionale. Questa dimostrazione non è costruttiva, perché non fornisce due numeri particolari a e b che soddisfano il teorema, ma solo due possibilità distinte, una delle quali deve essere quella vera (in realtà q è irrazionale, ma non si conosce un modo facile di dimostrarlo).

3. Nella teoria degli invarianti algebrici avevano un particolare interesse le cosiddette trasformazioni unimodulari, ottenute sostituendo in un'equazione una quantità incognita (diciamo x) con l'espressione $(py + q)/(ry + s)$, dove y è una nuova incognita e p, q, r, s sono numeri tali che $ps - rq = \pm 1$. Boole aveva scoperto che, data l'equazione quadratica generale $ax^2 + bx + c = 0$ (dove a, b e c sono numeri qualsiasi), l'espressione $b^2 - 4ac$ (discriminante dell'equazione) è invariante rispetto a tali trasformazioni. Vediamo subito che cosa vuol dire.

Sostituendo nell'equazione l'espressione indicata, ed eliminate le frazioni, si ottiene un'equazione quadratica in y, che si può scrivere nella forma $Ay^2 + By + C = 0$, dove A, B e C dipendono dai numeri a, b, c, p, q, r, s. Dire che $b^2 - 4ac$ è un invariante significa precisamente che il discriminante dell'equazione trasformata è uguale a quello dell'equazione di partenza, cioè $b^2 - 4ac = B^2 - 4AC$. Senza la condizione $ps - rq = \pm 1$, la relazione fra i due discriminanti si scriverà

$$B^2 - 4AC = \left(b^2 - 4ac\right)\left(ps - rq\right)^2$$

A chi desidera ricostruire da sé la dimostrazione consiglierei di partire dalla formula

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

dove x_1 e x_2 sono le due radici dell'equazione, e di rammentare che

$$b^2 - 4ac = 4a^2\left(x_1 - x_2\right)^2$$

4. Nel necrologio in suo onore Hermann Weyl (1944) scrive: «In realtà, scoprendo nuove idee e introducendo metodi nuovi e potenti egli non solo elevò questo argomento fino al livello fissato da Kronecker e Dedekind per l'algebra, ma fece un lavoro così accurato da non lasciare pressoché nulla da aggiungere ... Con giustificato orgoglio egli conclude il suo scritto *Über die vollen Invariantensysteme* [Sui sistemi completi di invarianti] con le parole: "Credo quindi che gli scopi più importanti della teoria degli ... invarianti [algebrici] siano stati raggiunti"».

5. Nella sua forma classica la teoria dei numeri si occupa delle relazioni e delle strutture (molto notevoli) esistenti nel dominio dei numeri naturali 1, 2, 3, ..., e in particolare di problemi che hanno a che fare coi numeri primi e la divisibilità; la teoria algebrica dei numeri riprende alcuni di questi temi, ma in domini ottenuti aggiungendo agli interi le radici (reali o complesse) di alcune equazioni algebriche. Lavorando con numeri della forma $m + n\sqrt{-1}$, dove m e n sono due interi ordinari, Gauss aveva scoperto quali di tali «interi gaussiani» erano primi, e aveva dimostrato che l'unicità della scomposizione di un numero in fattori primi valeva anche per questi nuovi interi, e non solo per quelli ordinari. Si scopre tut-

tavia che per numeri della forma $m + n\sqrt{10}$ ciò non è più vero. Si consideri come controesempio

$$6 = 2 \cdot 3 = \left(2 + \sqrt{10}\right)\left(-2 + \sqrt{10}\right)$$

ove si dimostra che 2, 3, $2 + \sqrt{10}$, e $-2 + \sqrt{10}$ sono primi; cosicché la scomposizione non è più unica. Dedekind, amico di Cantor, e Kronecker, suo arcinemico, avevano entrambi dimostrato che l'unicità della scomposizione poteva essere ristabilita per mezzo di quelli che oggi chiamiamo ideali primi; durante le loro passeggiate Hilbert e Hurwitz avevano discusso di questi due approcci rivali, concludendo che erano entrambi *scheußlich* (abominevoli). La trattazione dello *Zahlbericht* di Hilbert è invece molto elegante.

6. Hilbert (1935/1970), pp. 400-401.

7. Non potendo, per motivi di tempo, enunciare tutti e ventitré i problemi, Hilbert dovette fare una scelta. Il testo integrale di Hilbert, nella traduzione di Mary Winston Newson, è riportato in Browder (1976), pp. 1-34.

8. Browder (1976). (Il sottoscritto è coautore dell'articolo sul decimo problema).

9. La citazione è data, in forma più completa, alla fine del capitolo IV.

10. Van Heijenoort (1967), pp. 129-38.

11. Poincaré (1908), cap. 3.

12. *Loc. cit.*

13. *Loc. cit.*

14. L'«elaborata e pesante stratificazione» di Russell ha un nome tecnico: *teoria ramificata dei tipi.*

15. La più importante regola d'inferenza dei *Principia* è, come nella *Begriffsschrift* di Frege, quella (nota come *modus ponens*) che passa da una coppia di formule della forma $A \supset B$ e A alla formula B. Mentre Frege la presenta in modo molto chiaro, Whitehead e Russell sono meno limpidi e la danno come «proposizione primitiva»: *Tutto ciò che è implicato da una proposizione vera è vero* (Whitehead e Russell, 1925, p. 94).

16. Brouwer (1996).

17. La tesi di Brouwer è scritta in olandese. Per una traduzione inglese si veda Brouwer (1975), pp. 13-97.

18. Van Stigt (1990), p. 41.

19. Brouwer (1975), p. 96.

20. Nell'esempio di dimostrazione non costruttiva dato sopra la legge del terzo escluso interviene nell'asserzione «*q* o è razionale o è irrazionale».

21. Nel 1994 il premio Nobel per l'economia fu assegnato a tre persone, due economisti e il matematico John Nash. Nash venne premiato per un teorema, risalente alla sua tesi di dottorato del 1950, che aveva trovato numerose applicazioni sia in economia che altrove. Nella tesi egli aveva usato in modo molto ingegnoso il teorema del punto fisso.

22. Weyl era disturbato soprattutto dall'uso delle cosiddette definizioni impredicative da parte di Cantor e Dedekind. Un oggetto è definito *impredicativamente* se nella sua definizione si parla di un insieme di cui l'oggetto stesso è elemento. Dal punto di vista di una filosofia per la quale gli oggetti matematici sono costruiti pezzo dopo pezzo una simile definizione appare inaccettabile, essendo impossibile che l'insieme in questione sia stato costruito *prima* di uno dei suoi elementi. La posizione filosofica opposta, per la quale gli oggetti matematici preesistono e le definizioni si limitano a individuarli (come quando diciamo «Matilde è la persona più alta in questa stanza») ma non li costruiscono è detta platonismo; per Weyl era inaccettabile.

23. Da un discorso tenuto nel 1922 (a Copenaghen e successivamente ad Amburgo). Ringrazio Walter Felscher per avermi fatto notare il nesso fra l'accesa eloquenza di Hilbert e il momento storico che stava vivendo. Il testo completo della conferenza è riportato in Mancosu (1998), pp. 198-214; ma la traduzione, pur essendo abbastanza accurata, non rende adeguatamente, a mio avviso, la veemenza dell'originale. Nel tentativo di far meglio ho consultato varie altre versioni, oltre al testo tedesco (Hilbert, 1935/1970, pp. 159-60).

24. Reid (1986), pp. 137-38 e 144-45. Sui retroscena del

manifesto degli intellettuali tedeschi si veda Tuchman (1988), p. 322.

25. Reid (1986), p. 143.

26. Hilbert (1935/1970), p. 146.

27. John von Neumann, uno dei più grandi matematici del Novecento, nacque a Budapest nel 1903. Fu un ragazzo prodigio, per di più di famiglia ricca, in grado di dedicare ampie risorse allo sviluppo del suo talento. Lavorò in svariati campi della matematica pura e applicata, comprese la fisica matematica e l'economia. Divenne membro dell'Institute for Advanced Study di Princeton fin dalla sua fondazione nel 1933 e lo rimase fino alla morte, nel 1957. Durante la seconda guerra mondiale fu coinvolto in questioni militari, compreso il progetto della bomba atomica a Los Alamos. Questi interessi, continuati anche nel periodo della guerra fredda, lo portarono a occuparsi della costruzione di apparati di calcolo molto avanzati.

28. Il programma di Hilbert è discusso in un interessante saggio riportato in Mancosu (1998), pp. 149-97. L'articolo di Sieg (1999) contiene un'analisi approfondita basata su documenti inediti che mette bene in evidenza l'evoluzione del pensiero di Hilbert. Interessanti notizie sul contributo di Bernays sono contenute in Zach (1999). Su von Neumann e la riduzione all'assurdo dell'intuizionismo si veda Mancosu (1998), p. 168. Si deve anche ricordare che, sebbene Hilbert non avesse mai precisato in modo completamente esplicito quali metodi fossero «finitari», e quindi consentiti, è opinione comune che pensasse a qualcosa di ancora più restrittivo di ciò che era disposto ad accettare Brouwer.

29. Van Heijenoort (1967), p. 373.

30. *Ibid.*, p. 376.

31. *Ibid.*, p. 336.

32. Reid (1986), p. 187.

33. Van Stigt (1990), p. 272.

34. *Ibid.*, p. 110.

35. *Ibid.*, pp. 285-94; Mancosu (1998), pp. 275-85.

36. Sulla logica intuizionistica in informatica si veda Constable (1986).

37. Hilbert (1935/1970), pp. 378-87.

38. Dawson (1997), p. 69.

39. Nei tardi anni Quaranta, mentre studiavo per il dottorato, ebbi la fortuna di assistere alle conferenze di questi due grandi scienziati. Nessuna era un modello di esposizione scientifica, ma naturalmente non era questo il punto, e tutti ci ammassammo avidamente nella Fuld Hall (dove si trova la direzione dell'istituto) per ascoltare queste figure leggendarie.

Hermann Weyl introdusse una serie di lezioni di Kodaira, un matematico giapponese, e la cosa che ricordo meglio è che parlava di idee matematiche piacevolmente e simpaticamente. La sua esposizione, tuttavia, era piuttosto disordinata, mentre le lezioni di Kodaira furono un modello di chiarezza espositiva.

La conferenza di Einstein prendeva spunto dalla sua scoperta che era possibile derivare un insieme di equazioni del «campo unificato», al quale stava lavorando, da quello che definì un principio variazionale. Mentre scriveva sulla lavagna perse completamente la nozione del tempo e si fermò solo quando Robert Oppenheimer (il direttore dell'istituto) gli fece notare l'ora.

VI. GÖDEL MANDA TUTTO PER ARIA

1. Si veda Dawson (1997), p. 209. È stata una vera fortuna poter consultare questa superba biografia di Gödel. Ho utilizzato inoltre la breve raccolta di scritti curata da Weingartner e Schmetterer (1983) originata da un convegno su Gödel tenuto a Salisburgo nel 1983 (al quale ebbi il privilegio di assistere). Vi sono molte cose interessanti in Kreisel (1980), saggio *in memoriam* scritto da chi fu per un certo tempo molto vicino a Gödel, anche se non completamente attendibile. In Gödel (1986), pp. 1-37 vi è uno schizzo biografico di Gödel scritto con grande sensibilità da Solomon Feferman.

2. Gödel (1995), pp. 202-59.

3. Dawson (1997), pp. 58, 61 e 66.

4. I «vecchi cattolici» si staccarono da Roma nel 1870, rifiutando il dogma dell'infallibilità del papa [*N.d.T.*].

5. Weingartner e Schmetterer (1983), p. 27.

6. Carnap conseguì il dottorato all'Università di Jena, dove aveva studiato con Frege. Fu uno dei personaggi-guida della scuola filosofica del positivismo logico. Dal 1935 insegnò in università americane, prima a Chicago e poi alla UCLA.

Hans Hahn, relatore della dissertazione di Gödel, diede contributi importanti a diversi settori della matematica. Si interessava anche di questioni filosofiche.

7. L'espressione «la logica simbolica di Frege-Russell-Hilbert» è un'ipersemplificazione. La logica di base isolata da Hilbert, nota oggi come logica del primo ordine, era solo una parte dei sistemi di Frege e Russell.

8. Su quello che pensava Gödel dei logici si veda Dawson (1997), p. 58. Il testo completo della dissertazione di Gödel del 1929 e un condensato della tesi stessa pubblicato nel 1930 sono disponibili, in traduzione inglese con originale a fronte, in Gödel (1986), pp. 63-82; si veda anche l'illuminante nota introduttiva di Dreben e van Heijenoort (pp. 47-62).

9. Anche se i metodi finitari della sua metamatematica vengono spesso detti «intuizionistici», è probabile che Hilbert avesse in mente restrizioni ancora più rigide di quelle che voleva introdurre Brouwer. Per una discussione di questo problema si veda Mancosu (1998), pp. 167-68.

10. Gödel (1986), p. 65.

11. Anteponendo degli zeri alla rappresentazione decimale di un numero naturale, il numero non cambia: per esempio 17 = 017 = 0017, e così via. Perciò le stringhe *Ly* e , *Ly* e , , *Ly* ecc. sono tutte codificate dallo stesso numero, 17; ma poiché le stringhe che cominciano con una virgola non ci interessano, l'ambiguità non preoccupa. Si potrebbe ricordare – benché la cosa non abbia soverchia importanza – che per codificare le stringhe di segni Gö-

del non si servì della rappresentazione decimale; utilizzò invece l'unicità della scomposizione in fattori primi di un numero naturale, e assegnò il codice di ciascun simbolo come esponente del numero primo corrispondente. Per chiarire la differenza dovrebbe bastare questo semplice esempio: nel nostro sistema la stringa $L(x, y)$ diventerebbe, scritta in codice, 186079, mentre in quello di Gödel diventerebbe $2^1 3^8 5^6 7^0 11^7 13^9$.

12. La miglior traduzione inglese dello storico articolo (approvata da Gödel) si trova in Gödel (1986), pp. 113-38, e in van Heijenoort (1967), pp. 596-616. Il lettore interessato alla storia di come Gödel arrivò al suo teorema di incompletezza può consultare Dawson (1997), p. 61.

13. Per evitare di ricorrere a una nozione filosoficamente sospetta come «verità» Gödel si servì di un surrogato tecnico, una sorta di coerenza forte cui diede il nome di ω-coerenza, cosicché l'enunciato del suo teorema, a rigore, è: *se PM è ω-coerente, esiste una proposizione U tale che in PM non si può dimostrare né U né* $\neg U$. Pochi anni dopo J.B. Rosser realizzò un importante progresso mostrando che l'ipotesi dell'ω-coerenza poteva essere sostituita con quella della coerenza ordinaria. Era ora possibile – grazie anche ai risultati ottenuti nel frattempo da altri autori (in particolare, come si vedrà nel capitolo VII, da Alan Turing) – formulare il teorema di Gödel in una forma particolarmente suggestiva: per quanti nuovi assiomi si aggiungano a PM, se questi assiomi sono specificati da un algoritmo e non generano contraddizioni (cioè proposizioni della forma $A \wedge \neg A$) dimostrabili, nel sistema esisterà una proposizione indecidibile U.

14. Il sistema PM è troppo complicato perché si possa descriverlo in questa sede. Per presentare alcuni degli ingredienti che entrano nella composizione di proposizioni indecidibili utilizzeremo in sua vece il sistema PA. Possiamo costruire PA con 16 simboli:

$$\supset \neg \vee \wedge \forall \exists \underline{1} \oplus \otimes x\ y\ z\ (\ )\ '$$

Abbiamo usato versioni un po' modificate dei simboli 1, +, × e = per mettere in evidenza che vanno considerati come semplici segni, e al tempo stesso suggerire la loro interpretazione sottintesa. Le lettere x, y e z indicano variabili che prendono valori sui numeri naturali. Per ottenere ulteriori variabili (tre sole non sono sufficienti) affiggeremo alle singole lettere l'apice $'$. Ad esempio y' e z''' sono variabili. Poiché i simboli sono più di dieci useremo una codifica in cui ogni simbolo è rimpiazzato da una coppia di cifre decimali:

$\supset$	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\forall$	$\exists$	$\underline{1}$	$\oplus$	$\otimes$	x	y	z	(	)	$'$	$\doteq$
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
10	11	12	13	14	15	21	22	23	31	32	33	41	42	43	44

I numeri naturali sono invece rappresentati da stringhe di questi simboli (dette *numerali*) costruite nel seguente modo:

Numerale	Numero	Codice
$\underline{1}$	1	21
$(\underline{1}\oplus\underline{1})$	2	4121222142
$((\underline{1}\oplus\underline{1})\oplus\underline{1})$	3	414121222142222142
$(((\underline{1}\oplus\underline{1})\oplus\underline{1})\oplus\underline{1})$	4	41414121222142222142222142
...	...	...

La maggior parte delle stringhe costruibili con questi sedici segni, ad esempio

$$\exists\oplus\otimes x\forall\neg \quad \text{e} \quad \doteq\supset\underline{1}'()$$

aventi codici 152223311411 e 441021434142 rispettivamente, sono insensate, ma alcune di esse – chiamate *enunciati* – possono essere usate per esprimere proposizioni (vere o false) sui numeri naturali. Per esempio la stringa

$$\Big((\underline{1}\oplus\underline{1})\otimes(\underline{1}\oplus\underline{1})\doteq\big(((\underline{1}\oplus\underline{1})\oplus\underline{1})\oplus\underline{1}\big)\Big)$$

il cui codice numerico è

414121222142234121222142424441414121222142222142222142

esprime la proposizione vera che 2 per 2 fa 4, mentre

$$\left(\left(\underline{1}\oplus\underline{1}\right)\otimes\left(\underline{1}\oplus\underline{1}\right)\doteq\left(\left(\underline{1}\oplus\underline{1}\right)\oplus\underline{1}\right)\right)$$

esprime la proposizione falsa che 2 per 2 fa 3. L'enunciato

$$(\forall x)\left(\neg\left(x\doteq\underline{1}\right)\supset(\exists y)\left(x\doteq\left(y\oplus\underline{1}\right)\right)\right)$$

il cui codice è

41143142411141314421421041153242413144413222214242 42

esprime la proposizione che ogni numero naturale, eccetto 1, ha un predecessore immediato.

Per completare la nostra descrizione di PA bisognerebbe specificare certi enunciati come *assiomi*, nonché le regole di inferenza per derivare da essi gli enunciati dimostrabili. L'elenco dei passi di questa derivazione, che comincia sempre con alcuni assiomi e termina con un enunciato dimostrabile in PA, è detto *dimostrazione* dell'enunciato. Senza scendere nei dettagli (perché la cosa ci porterebbe troppo lontano) consideriamo questo semplice esempio:

$$(\forall x)\neg\left(\underline{1}\doteq\left(x\oplus\underline{1}\right)\right)$$

la cui interpretazione canonica esprime la proposizione che 1 non è successore immediato di alcun numero naturale. Un tale enunciato potrebbe venir scelto come assioma; ora, poiché gli enunciati che cominciano con $\forall$ esprimono asserzioni che attribuiscono una certa proprietà a *tutti* i numeri interi positivi, si può (anzi è naturale) applicare una regola d'inferenza che permetta di rimuovere il quantificatore universale $(\forall x)$ e sostituire a x un numerale (il che significa semplicemente passare da un'asserzione generale a un suo caso specifico). Un esempio, anche questo molto semplice, può essere

$$\frac{(\forall x)\neg\left(\underline{1} \doteq (x \oplus \underline{1})\right)}{\neg\left(\underline{1} \doteq (\underline{1} \oplus \underline{1})\right)}$$

La conclusione è un enunciato dimostrabile di PA ottenuto sostituendo $\underline{1}$ alla variabile x, ed esprime il fatto che 1 e 2 non sono uguali.

Oltre alle stringhe che esprimono proposizioni ne esistono altre, le cosiddette stringhe *unarie*, che possiamo usare per definire insiemi di numeri naturali. Le stringhe unarie devono contenere la variabile x ma non i quantificatori $(\forall x)$ o $(\exists x)$ (pur potendo contenere quantificatori che agiscono su altre variabili, come y o x''); inoltre – e questa è una proprietà cruciale – devono essere tali che se la x è sostituita ovunque da un numerale, la stringa che ne risulta sia un enunciato. È unaria, ad esempio,

$$(\exists y)\left(x \doteq \left((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes y\right)\right)$$

il cui codice numerico è

4115324241314441412122214223324242

Se sostituiamo la x con il numerale $(\underline{1} \oplus \underline{1})$ otteniamo l'enunciato vero

$$(\exists y)\left((\underline{1} \oplus \underline{1}) \doteq \left((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes y\right)\right)$$

Se invece usiamo il numerale $\underline{1}$, otteniamo l'enunciato falso

$$(\exists y)\left(\underline{1} \doteq \left((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes y\right)\right)$$

La stringa unaria da cui siamo partiti può essere pensata come definizione dell'insieme dei numeri pari. Un'altra stringa unaria, più complicata,

$$(\forall y)(\forall z)\left(\left(x \doteq (y \otimes z)\right) \supset \left((y \doteq 1) \vee (y \doteq x)\right)\right)$$

il cui codice numerico è

41143242411433424141314441322333424210414132442
1421241324431424242

definisce l'insieme formato da 1 e tutti i numeri primi. Dati una stringa unaria A e un numero naturale n, scriveremo $[A : n]$ per indicare l'enunciato ottenuto sostituendo alla x in A il numerale che rappresenta il numero n. Per esempio

$$\left[(\exists y)\left(x \doteq \left((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes y\right)\right) : 2\right]$$

sta per l'enunciato

$$(\exists y)\left((\underline{1} \oplus \underline{1}) \doteq \left((\underline{1} \oplus \underline{1}) \otimes y\right)\right)$$

Siamo finalmente in grado di spiegare come si possono usare i metodi di Gödel per costruire un enunciato U di PA esprimente la proposizione che U stesso non è dimostrabile in PA. È possibile ordinare le stringhe unarie in base alla grandezza dei codici numerici loro assegnati: la stringa unaria col codice più piccolo è $(x \doteq \underline{1})$, il cui codice è 4131442142, cioè più di quattro miliardi. Indichiamo questa stringa con A_1 e immaginiamo che tutte le stringhe siano disposte in una successione

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

basata sulla grandezza dei rispettivi codici. Essendo stringhe unarie, $[A_n : m]$ sarà un enunciato per qualsiasi coppia di numeri naturali n e m. Alcuni di questi enunciati saranno dimostrabili in PA, mentre altri non lo saranno. Per ogni n consideriamo allora l'insieme dei valori di m per i quali $[A_n : m]$ *non è dimostrabile in* PA. Se riandiamo alla nostra analisi del metodo della diagonale di Cantor, vediamo che questo insieme può essere concepito come un pacchetto con l'etichetta n. Applicando il metodo, cioè identificando l'etichetta con uno degli elementi del pacco che contrassegna, formiamo l'insieme K dei numeri n tali che $[A_n : n]$ *non* è dimostrabile in PA. D'altra parte la dimostrabilità in PA è definibile in PA stessa, e questo ci permette di trovare una stringa unaria B che definisce proprio questo insieme K in PA. Ma allora deve esserci un numero q tale che $B = A_q$, perché nella successione delle A vi sono tutte le stringhe unarie. Perciò per qualsiasi numero naturale n l'enunciato $[A_q : n]$ esprime la proposizione

$$\left[A_n : n\right] \text{non è dimostrabile in PA}$$

Nel caso particolare in cui n riceve il valore q vediamo allora che $[A_q : q]$ esprime la proposizione

$$\left[A_q : q\right] \text{non è dimostrabile in PA}$$

$[A_q : q]$ è quindi un enunciato di PA esprimente la proposizione che esso stesso non è dimostrabile in PA.

15. Dopo che Gödel aveva dimostrato l'impossibilità di provare la coerenza di PM usando solo le risorse matematiche di PM, sarebbe stato naturale concludere che per l'obiettivo di Hilbert – dimostrare tale non-contraddittorietà usando solo i limitati metodi finitari che era disposto ad ammettere – non c'era speranza di successo. Questa fu sicuramente la conclusione di von Neumann. Ma Gödel non ne era altrettanto sicuro, anzi continuò a sperare nell'esistenza di un metodo di prova inammissibile *all'interno* di PM ma che potesse essere considerato finitario e portasse a una dimostrazione di non-contraddittorietà. In effetti, nei decenni trascorsi dalla scoperta di Gödel sono stati elaborati metodi che in una certa misura soddisfano questo criterio, e la conseguenza è che la teoria hilbertiana della dimostrazione è ancora un'area di ricerca in pieno rigoglio, anche se ben pochi sarebbero disposti ad affermare che i risultati ottenuti ci hanno resi più sicuri della validità dei sistemi come PM.

16. Un *interprete* traduce uno dopo l'altro i singoli passi del programma in linguaggio macchina, e porta sempre a termine un passo prima di andare al successivo. Un *compilatore* traduce in linguaggio macchina un intero programma, e il programma così prodotto può girare autonomamente, senza più bisogno del compilatore. I software commerciali sono generati quasi sempre da compilatori.

17. I linguaggi di programmazione più usati nell'industria del software (come il C e il FORTRAN) di solito sono detti *imperativi* perché i programmi scritti in tali linguaggi possono essere pensati, riga dopo riga, come *ordini* che il calcolatore deve eseguire. Anche linguaggi a oggetti come il C++ sono imperativi. Nei cosiddetti linguaggi di programmazione funzionali (come il LISP) le singole righe del programma sono invece definizioni di operazioni: più che dire al calcolatore che cosa fare, *definiscono* quello che deve dare. Lo speciale linguaggio inventato da Gödel è molto simile a un linguaggio di programmazione funzionale.

18. Tornando all'esempio di PA, con la codifica specifica da noi proposta possiamo esaminare alcuni dei problemi che la traduzione dei concetti metamatematici in operazioni numeriche comporta. La prima domanda che possiamo fare è: «Come facciamo a stabilire quanto è lunga una stringa, dato il suo codice numerico?». Poiché a ogni simbolo corrispondono due cifre, la risposta è semplice: la lunghezza è uguale a metà del numero delle cifre del codice. Dato un numero di codice r, indichiamo con $\mathcal{L}(r)$ la lunghezza della stringa corrispondente. Ora, date due stringhe, se ne può sempre ricavare una nuova scrivendo la seconda di seguito alla prima: qual è il codice di questa terza stringa se le prime due hanno, rispettivamente, i codici r e s? La formula che ci dà la risposta è $r10^{2\mathcal{L}(s)}$; infatti moltiplicare r per questa potenza di 10 significa attaccargli tanti zeri quante sono le cifre di s. Scriveremo questa somma $r * s$, seguendo Gödel. Supponiamo ora che r e s siano i codici di due enunciati: qual è il codice del nuovo enunciato che otteniamo scrivendo il simbolo $\supset$ fra l'uno e l'altro e il risultato fra parentesi? Se consultiamo la tabella, vediamo che la risposta è $41 * r * 10 * s * 42$. Proseguendo per questa via traduciamo in operazioni aritmetiche nozioni metamatematiche sempre più complesse.

19. Sembra che il teorema cinese del resto sia stato scoperto in Cina poco dopo l'anno mille. Possiamo illustrarlo per mezzo di questo esercizio: *trovare un numero che diviso per 6 lasci un resto di 2 e diviso per 11 lasci un resto di 5.* Bastano pochi tentativi per scoprire che 38 ha le caratte-

ristiche cercate. Il teorema cinese del resto ci assicura che potremo sempre trovare un numero che, diviso per certi numeri dati, lascerà resti pure dati, a condizione che i divisori non abbiano fattori comuni (a parte 1, naturalmente); esisterà per esempio un numero che diviso per 69, 17, 25 e 91 darà come resto, rispettivamente, 3, 7, 10 e 11 (ma la conclusione non è più sicuramente vera se, per esempio, 17 è sostituito da 27, perché in tal caso i divisori 27 e 69 avranno il fattore 3 in comune). Gödel usò il teorema cinese del resto come sistema di codifica: possiamo specificare una lunga successione di numeri per mezzo di una collezione di divisori tali che due di loro, comunque presi, non abbiano fattori comuni, più uno stesso numero da dividere per ognuno di questi. Poiché nel linguaggio base dell'aritmetica il termine «resto» è facile da definire, è possibile usare questo fatto per esprimere in tale linguaggio relazioni fra successioni di numeri naturali.

Questa tecnica gödeliana che usa il teorema cinese del resto per codificare lunghe successioni di numeri ha svolto un ruolo importante anche nella mia vita professionale. Per la tesi di dottorato (accettata dall'Università di Princeton nel 1950) lavorai sul decimo dei problemi elencati da Hilbert nel 1900, e il teorema cinese del resto risultò importantissimo per i risultati parziali che riuscii a ottenere; d'altronde fu essenziale anche per il lavoro che feci in seguito con Hilary Putnam e Julia Robinson. L'ultimo passo della soluzione del decimo problema di Hilbert, quello cruciale, fu compiuto nel 1970 dal matematico russo ventiduenne Yurij Matijasevič. I lettori interessati possono consultare l'articolo di Davis e Hersh (1973) scritto per i non specialisti.

20. Il testo completo delle tre relazioni si trova in Benacerraf e Putnam (1983), pp. 41-65.

21. Per il testo completo delle osservazioni di Gödel al congresso di Königsberg, con Nota introduttiva di John Dawson, si veda Gödel (1986), pp. 139-44. Si veda anche Dawson (1997), pp. 68-71.

22. Dawson (1997), p. 70.

23. Goldstine (1972), p. 174.

24. *Loc. cit.*

25. Simili ricerche coinvolgono numeri cardinali molto grandi e vanno al di là degli scopi di questo libro. Si veda Feferman (1999) per un interessante articolo di uno scettico fra i più noti.

26. Dawson (1997), pp. 32-33 e 277.

27. Secondo una prima versione ballava al Nachtfalter, («falena») un locale notturno il cui nome avrebbe dovuto far pensare a vaghe creature della notte; secondo un'altra faceva danza classica.

28. Dawson (1997), p. 34.

29. *Ibid.*, p. 111.

30. Weingartner e Schmetterer (1983), p. 27.

31. Il più interessante di questi contributi riguardava alcuni sistemi formali sviluppati da Heyting, un allievo di Brouwer, per esprimere in maniera compatta le idee del maestro sui fondamenti. Quanto a Brouwer, restò sempre convinto che nessun linguaggio formale definito in modo preciso potesse rendere giustizia ai suoi concetti, ma espresse, sia pure di mala voglia, un certo interesse per i risultati di Heyting. Uno dei sistemi di Heyting, HA (*Heyting Arithmetic*), è molto simile a PA, a parte il fatto che la sua logica di base utilizza regole ispirate all'idea brouweriana di inferenza accettabile anziché quelle di Frege. In particolare, non c'è in HA la legge del terzo escluso. Gödel scoprì un modo molto semplice di tradurre PA nel linguaggio di HA; di conseguenza, in questo caso esiste, contro l'idea che l'intuizionismo sia più restrittivo della matematica classica, un senso in cui anzi esso la comprende. In particolare, ogni prova della non-contraddittorietà di HA si traduce immediatamente in una prova della non-contraddittorietà di PA.

32. Dawson(1997), pp. 103-106.

33. Weingartner e Schmetterer (1983), p. 20.

34. È però possibile che i due novelli sposi avessero progettato di recarsi a Princeton insieme. Si veda Dawson (1997), pp. 128-29.

35. *Ibid.*, pp. 142 e 146.

36. Kreisel (1980), p. 155.

37. Dawson (1997), p. 91.
38. *Ibid.*, pp. 143-45 e 148-51.
39. *Ibid.*, p. 153.
40. Browder (1976), p. 8.
41. Più esattamente, Gödel dimostrò che *se* sistemi come PM, o come quelli basati sugli assiomi della teoria degli insiemi, sono coerenti, allora restano tali anche quando viene aggiunta come nuovo assioma l'ipotesi del continuo. In altre parole, se questi sistemi sono coerenti, in essi tale ipotesi non è refutabile.
42. La battaglia infuria tuttora; ad esempio, un logico eminente come Solomon Feferman ha sostenuto di recente che l'ipotesi del continuo è «intrinsecamente vaga». Quanto a Gödel, dopo qualche ondeggiamento iniziale si convinse che non era vaga per nulla, anzi era un'affermazione perfettamente significante – e molto probabilmente falsa. Alcuni recentissimi lavori del logico W. Hugh Woodin fanno ritenere che avesse ragione.
43. Gödel (1990), pp. 113 e 190.
44. Gödel (1995), pp. 49-50.
45. Gödel (1990), pp. 144-45.
46. Gödel (1995); il volume raccoglie la maggior parte dei lavori inediti di Gödel.
47. Si trattava di una delle prestigiose Gibbs Lectures, tenute annualmente su invito della American Mathematical Society. Ebbi la fortuna di essere fra il pubblico e di ascoltare le considerazioni di Gödel, che non mancarono di influenzare profondamente le mie idee intorno ai fondamenti della matematica.
48. Si veda, a questo proposito, Dauben (1995), p. 458; della lettera si parla alle pp. 485-86.
49. Dawson (1997), pp. 153, 158, 179-80 e 245-53.

VII. TURING E L'IDEA DEL CALCOLATORE GENERALE

1. Charles Babbage nacque a Londra nel dicembre del 1791. Abile matematico, faceva parte di un gruppo che

cercava di portare le idee dei matematici continentali nelle università britanniche. Sviluppò un forte interesse per la meccanizzazione del calcolo, tanto da concepire una macchina, detta «alle differenze», volta a rendere più efficiente l'elaborazione di tavole numeriche. Poco tempo dopo ebbe l'idea, ben più ambiziosa, della macchina analitica. Morì nel 1871, deluso e amareggiato per la mancata realizzazione del suo progetto.

2. Huskey e Huskey (1980), p. 300.

3. Ceruzzi (1983), p. 43.

4. Ho avuto la fortuna di poter disporre della bellissima biografia di Turing scritta da Andrew Hodges (1983).

5. Come molti lettori sapranno, le *public schools* inglesi sono istituti privati di élite. Nel curriculum di un giovane la frequenza di una *public school* era una tappa fondamentale per poter aspirare a una buona carriera da borghese medio-alto.

6. Hodges (1983), p. 45.

7. Nel rievocare la figura dell'amico defunto, Alan aveva accenti vibranti. «Benedicevo la terra che calpestava» diceva di Chris, il quale «faceva sembrare tutti gli altri terribilmente ordinari» (*ibid.*, p. 52).

8. *Ibid.*, p. 81.

9. Titolo che spetta ai membri del corpo accademico di una università, in particolare ai *fellows*.

10. Nelle università inglesi, prima della seconda guerra mondiale, pochi erano interessati alla laurea di dottorato, che invece è un requisito standard per una carriera accademica in Francia, Germania e Stati Uniti.

11. Hodges (1983), p. 130.

12. In realtà Hilbert aveva formulato l'*Entscheidungsproblem* in modo un po' diverso: esisteva una procedura per stabilire se un'espressione della logica del primo ordine fosse valida in ogni interpretazione possibile? Ma dopo il teorema di completezza di Gödel era ormai chiaro che la forma in cui il problema è enunciato nel testo equivaleva alla formulazione di Hilbert.

13. Il lavoro sull'*Entscheidungsproblem* trattava principalmente delle cosiddette *formule prenesse*, espressioni scritte utiliz-

zando i simboli $\neg$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$, nelle quali tutte le occorrenze dei cosiddetti quantificatori, universale ($\forall\ldots$) ed esistenziale ($\exists\ldots$), stanno all'inizio e precedono tutti gli altri simboli. Non era difficile dimostrare che l'*Entscheidungsproblem* era riducibile al problema di trovare un algoritmo capace di stabilire se una formula prenessa data era *soddisfacibile* – se esisteva, cioè, un modo di interpretare i suoi simboli non logici tale da farle esprimere un enunciato *vero*. Consideriamo, per fare un esempio, le due formule prenesse

$$(\forall x)(\exists y)\big(r(x) \supset s(x,y)\big) \text{ e } (\forall x)(\exists y)\big(q(x) \wedge \neg q(y)\big)$$

La prima è soddisfacibile: supponendo ad esempio che le variabili x e y indichino persone viventi in un particolare momento, possiamo interpretare $r(x)$ come «x è un uomo sposato e monogamo» e $s(x, y)$ come «y è la moglie di x». In tal modo la prima formula prenessa dice: «Ogni uomo sposato e monogamo ha una moglie», che è sicuramente un'asserzione vera. La seconda formula prenessa è invece insoddisfacibile, perché quali che siano il dominio di individui che scegliamo e il significato attribuito al simbolo q, stipulerebbe sia che tutti questi individui hanno la proprietà rappresentata da q sia che alcuni non l'hanno.

Le formule prenesse possono essere classificate in base al modo in cui vi si succedono i quantificatori universali ed esistenziali con cui cominciano; si parla ad esempio di *classe di prefissi* $\forall\exists\forall$ per indicare l'insieme di tutte le formule prenesse che cominciano con ($\forall\ldots$)($\exists\ldots$)($\forall\ldots$), e così via. In un articolo del 1932 Gödel propose un algoritmo in grado di controllare la soddisfacibilità di qualsiasi formula prenessa appartenente alla classe di prefissi

$$\forall\forall\exists\ldots\exists$$

In un altro articolo, pubblicato l'anno dopo, dimostrò invece che per risolvere l'*Entscheidungsproblem* bastava trovare un algoritmo capace di verificare la soddisfacibilità di tutte le formule prenesse della classe di prefissi

$$\forall\forall\forall\exists\ldots\exists$$

Lo scarto fra quello che si poteva fare e quello che si sarebbe dovuto fare era stato dunque ridotto a un unico quantificatore universale, un unico ∀.

Gli articoli in questione (in traduzione inglese con originale tedesco a fronte) si trovano in Gödel (1986), pp. 168-69 e 226-36. La Nota introduttiva di W. Goldfarb (pp. 162-67) fa anche riferimento ad alcuni lavori precedenti sull'argomento.

14. Hodges (1983), p. 129.

15. All'epoca la stessa parola *computer* indicava una persona il cui lavoro consisteva nel fare calcoli.

16. L'analisi di Turing era più accurata. Si vedano Turing (1936), pp. 250-51, e Davis (1965), pp. 136-37.

17. Naturalmente Turing non le chiamava macchine di Turing. Il termine da lui usato era *a-machine*, dove «*a*» significa «automatico».

18. È da notare che questo sistema permette di scrivere sul nastro altri simboli, oltre alle cifre decimali e a □, codificandoli con stringhe come, ad esempio, 81118. Possiamo utilizzare tali simboli per contrassegnare determinate caselle del nastro, così da ritrovarle a una visita successiva. Si può dimostrare non solo che l'introduzione di questi simboli addizionali non aumenta la potenza di calcolo delle macchine di Turing, ma anche che l'uso del sistema decimale è irrilevante per quanto riguarda le loro possibili prestazioni. Si veda Davis, Sigal e Weyuker (1994), pp. 113-68.

19. Per un rapido riepilogo si veda sopra, pp. 99-103.

20. Va sottolineato che, se veramente esistesse un algoritmo per distinguere i membri di D dai non-membri, queste condizioni su ingresso e uscita non costituirebbero un problema. Fornire il numero d'ingresso a un essere umano perché applichi il presunto algoritmo in quella forma – o chiedergli di scrivere nella forma desiderata l'uscita sul nastro – non presenterebbe difficoltà di sorta.

21. Benché l'insolubilità dell'*Entscheidungsproblem* si possa provare nel modo appena descritto, ciò sarebbe abbastanza laborioso per la necessità di creare macchine di Turing capaci di lavorare su interi scritti in notazione decimale.

Per avvicinarci al procedimento realmente seguito da Turing mostreremo innanzitutto che il problema di stabilire se una macchina data, che inizi con un nastro totalmente vuoto, si fermerà o meno è insolubile. Supponiamo infatti che vi sia un algoritmo capace di risolverlo. In tal caso, per stabilire se un certo codice numerico n appartiene a D, prima scriviamo le quintuple che formano la macchina di Turing $\mathcal{T}$ con codice n; poi le quintuple che fanno sì che n venga scritto sul nastro di una macchina di Turing. Aggiungendo queste ultime alle quintuple della macchina $\mathcal{T}$, otteniamo una nuova macchina che prima scriverà n sul nastro e poi farà ciò che avrebbe fatto $\mathcal{T}$ con quell'ingresso. Iniziando con un nastro vuoto, la nuova macchina si fermerà se e solo se $\mathcal{T}$ si fermerà quando parte con il numero n sul nastro, il che accade se e solo se n non appartiene a D. Dunque l'ipotetico algoritmo in grado di controllare se una data macchina di Turing, partendo con un nastro vuoto, finirà per fermarsi potrebbe essere usato per risolvere il problema – insolubile! – di determinare l'appartenenza a D.

Osserviamo poi che è insolubile pure il problema di stabilire se una macchina data stamperà mai un particolare simbolo. È facile, infatti, disporre le cose in modo che una macchina, quando si ferma, si trovi in uno stato F che non è l'iniziale di alcuna quintupla. Scegliamo allora un nuovo simbolo X che non compaia in nessuna quintupla della macchina e aggiungiamo tutte le quintuple del tipo

$$Fa : X \star F$$

dove a è un qualsiasi simbolo presente in una delle quintuple originarie. Questa nuova macchina stamperà X ogniqualvolta la macchina originaria si sarebbe fermata. Ne deriva appunto che non esiste un algoritmo per stabilire se una macchina di Turing, partendo da un nastro vuoto, arriverà mai a stampare un determinato simbolo. È questo il problema che Turing espresse nel linguaggio della logica del primo ordine, arrivando così all'insolubilità dell'*Entscheidungsproblem*.

22. Per esempio mostrò come costruire macchine capaci

di generare le successioni di 0 e 1 che rappresentano in forma binaria i numeri reali e e π, nonché diversi altri numeri reali che incontriamo nella pratica matematica corrente, come le radici di equazioni polinomiali a coefficienti interi e perfino gli zeri reali delle funzioni di Bessel.

23. Turing (1936), pp. 129-32.

24. Alonzo Church (1903-1995) svolse un ruolo cruciale nel promuovere la grande fioritura della logica negli Stati Uniti. Fondò fra l'altro l'autorevole «Journal of Symbolic Logic» e per oltre quarant'anni ne fu il curatore. Fra i trentuno studenti che presero il dottorato con lui c'era Stephen Kleene (1909-1994), altro logico americano di primo piano (e c'ero anch'io).

25. Quello stesso primo volume del «Journal of Symbolic Logic» in cui Church dimostrava l'insolubilità dell'*Entscheidungsproblem* conteneva un breve articolo del logico americano E.L. Post che proponeva un concetto molto vicino a quello di Turing (Davis, 1965, pp. 289-91). Ebbi Post come professore quando ero studente al City College di New York.

26. Davis (1982).

27. Per una ristampa della dissertazione di Turing si veda Davis (1965), pp. 155-222. Le gerarchie in questione si estendono al transfinito di Cantor, per cui dopo il 1°, 2°, 3°, ... sistema viene l'ω-esimo, seguito dall'$(\omega + 1)$-esimo, ecc.

28. Hodges (1983), pp. 176-77.

29. *Ibid.*, p. 161.

30. Stanislaw Ulam (1909-1984) era uno studioso di primo piano che si occupò di molti settori della matematica pura e applicata, nonché un buon amico di von Neumann; fu, in ultima analisi, una sua idea a produrre un'importante estensione dell'assiomatica ordinaria della teoria degli insiemi che fece chiarezza sul lavoro di Gödel intorno all'ipotesi del continuo. Ma non tutti apprezzeranno il suo risultato più importante, il progetto di base della bomba termonucleare a fissione-fusione.

31. Hodges (1983), p. 194. A chi abbia familiarità con i successivi lavori di Kolmogorov e Chaitin sulla comples-

sità descrittiva, il gioco potrebbe suggerire che il pensiero di von Neumann andasse nella stessa direzione.

32. *Ibid.*, p. 710.

33. Molto vantaggiosamente, l'officina si trovava nel Palmer Physic Laboratory, porta a porta con Fine Hall, la palazzina dei matematici. C'era addirittura un passaggio coperto che collegava i due edifici.

34. Il matematico Gordon Welchman (di sei anni più vecchio di Turing) aggiunse al progetto un elemento che ne migliorò di molto l'efficacia. I lettori interessati ai dettagli tecnici della decifrazione di Enigma possono consultare Welchman (1982) e Hodges (1983). Hinsley (1993) contiene interessanti descrizioni di Bletchley Park nel periodo bellico, scritte da alcuni dei partecipanti al progetto.

35. L'episodio è stato riferito [a Hodges] da Peter Hilton, collaboratore di Alan a Bletchley Park.

36. Probabilmente il maggiore contributo, in questa fase, venne da W.T. Tutte. Per una illustrazione più tecnica di questi argomenti si veda il sito internet http://f.home.cern.ch/f/frode/crypto/tutte.html.

VIII. LA COSTRUZIONE DEI PRIMI CALCOLATORI UNIVERSALI

1. Goldstine (1972), p. 22. Secondo Stein (1987), molto di ciò che è stato scritto sulla Lovelace è pura leggenda.

2. Goldstine (1972), p. 120.

3. Il calcolatore di Atanasoff era stato pensato per risolvere sistemi di equazioni lineari, cioè problemi come

$$\begin{aligned} 2x+3y-4z&=5\\ 3x-4y+2z&=2\\ x-3y-5z&=4 \end{aligned}$$

La macchina era progettata per trattare fino a trenta equazioni in trenta incognite.

4. Lee (1995), p. 44. Quest'opera è la fonte di buona parte del materiale biografico di questo paragrafo.
5. Burks e Burks (1981).
6. Gli analizzatori differenziali contenevano un certo numero di moduli destinati a calcolare adeguate approssimazioni numeriche degli integrali definiti. L'ENIAC conteneva moduli che facevano la stessa cosa, ma con maggiore precisione, utilizzando algoritmi ben noti.
7. Goldstine (1972), pp. 186 e 188.
8. Pur avendo un'ampia circolazione e una grande influenza, la relazione di von Neumann fu pubblicata solo nel 1981, in appendice a un libro che tendeva a minimizzarne il contributo. Si veda Stern (1981), pp. 177-246.
9. McCulloch e Pitts (1943); von Neumann (1961-1963), vol. V, p. 319.
10. Goldstine (1972), p. 191.
11. Randell (1982), p. 384.
12. Goldstine (1972), p. 209; Knuth (1970).
13. Von Neumann (1961-1963), vol. V, pp. 1-32.
14. *Ibid.*, pp. 34-79.
15. La memoria dei moderni calcolatori consiste di chips di silicio detti RAM, che sta per *Random Access Memory*, «memoria ad accesso casuale».
16. A proposito di studi che minimizzano il contributo di von Neumann alla creazione dei calcolatori e ignorano completamente quello di Turing, si veda Metropolis e Worlton (1980) e Stern (1981). Passi dell'appunto di Eckert (una tipica relazione da ingegnere) sono riportati in Stern (1981), p. 28.
17. Stern (1981).
18. La mia prima esperienza come programmatore risale alla primavera del 1951, quando cominciai a programmare per l'ORDVAC, un johnniac costruito all'Università dell'Illinois di Urbana-Champaign. Nell'estate del 1954 scrissi un programma (non estraneo al sogno di Leibniz) che girava sul johnniac originale dell'Institute for Advanced Study, che oggi si può ammirare alla Smithsonian Institution di Washington.

19. L'analisi del rapporto di Turing sull'ACE si trova nell'ottimo articolo di Carpenter e Doran (1977), mentre il rapporto si può leggere in Turing (1992), pp. 29-62. Per molti anni è rimasto in forma di dattiloscritto, non facile da trovare.
20. Ciò che Turing proponeva, detto in linguaggio moderno, era l'uso di una pila (*stack*) per gestire le subroutine, dove una pila è una struttura dati del tipo LIFO (*Last-In-First-Out*, «ultimo dentro primo fuori»). Quando si interrompe un calcolo per usare una subroutine preprogrammata, si inserisce un promemoria per prendere nota di ciò che resta da fare una volta che questa sia terminata; ma le subroutine possono richiamare altre subroutine, nel qual caso si forma una pila di promemoria. Turing propose due immagini pittoresche, «seppellisci» (*bury*) e «disseppellisci» (*unbury*), per l'inserimento di un promemoria nella pila e il suo recupero dalla «cima» della stessa. (Oggi i termini usati sono *push* e *pop*, sia in inglese sia in italiano).
21. Hodges (1983), p. 457.
22. Turing (1992), pp. 64 e 72.
23. *Ibid.*, pp. 84 e 86-87; Hodges (1983), p. 433.
24. Metropolis e Worlton (1980); Stern (1981).
25. Goldstine (1972), pp. 191-92.
26. Turing (1992), p. 61.
27. Davis (1987).
28. Whitemore (1988).
29. Tra di essi vi era anche Kurt Gödel.
30. Marcus (1984), pp. 183-84. L'opera citata è il ben noto *La condizione della classe operaia in Inghilterra nel 1844* di Friedrich Engels [trad. it. Savelli, Roma, 1972].
31. Lavington (1980), pp. 31-47.
32. Goldstine(1972), p. 218.
33. Nell'estate del 1954 ho dovuto lottare personalmente con le istruzioni per il calcolatore del von Neumann's Institute for Advanced Study, destinate fondamentalmente al lavoro bruto sui numeri. In quell'occasione cercavo di realizzare un algoritmo che controllasse la verità di alcune proposizioni di PA (si veda la definizione al capitolo VI) che avevano a che fare con l'addizione ma non con la moltiplicazione. (A proposito di questo mio program-

ma, in Siekmann e Wrightson (1983) si afferma nella Prefazione: «Nel 1954 un programma per calcolatore produsse quella che è, probabilmente, la prima dimostrazione matematica generata da una macchina»). Sono sicuro che l'insieme delle istruzioni dell'ACE sarebbe stato molto più adatto allo scopo.

34. Hodges (1983), p. 199.

IX. OLTRE IL SOGNO DI LEIBNIZ

1. Turing (1992), p. 84.
2. I cinque informatici erano i seguenti (tra parentesi il titolo dell'intervento): Joseph Y. Halpern (*Epistemic Logic in Multi-Agent Systems*); Phokion G. Kolaitis (*Logic in Computer Science: An Overview*); Christos Papadimitriou (*Complexity as Metaphor*); Moshe Y. Vardi (*From Boole to the Pentium*); Victor D. Vianu (*Logic as a Query Language*).
3. Per una breve nota biografica su Joseph Weizenbaum si veda Lee (1995), p. 724.
4. Turing (1992), p. 133.
5. L'articolo di Searle (1999) contiene vari riferimenti ad altri scritti dello stesso autore su argomenti affini. Lo scritto è in realtà una recensione a un libro divulgativo di Ray Kurzweil. Tra i miei obiettivi non c'era quello di difendere Kurzweil dal furibondo attacco di Searle; semplicemente, volevo utilizzare la recensione come comoda fonte di idee che Searle ha espresso più volte.
6. Solo dopo che Turing, Church e altri avevano chiarito la nozione di processo algoritmico, il teorema di Gödel avrebbe potuto essere formulato in questo modo.
7. Penrose fu il primo a sostenere questa tesi in un testo di divulgazione (Penrose, 1989), e nonostante diversi logici abbiano cercato di farlo ragionare continua a difendere le sue idee aberranti; su questo argomento ho scritto in Davis (1990). Penrose risponde alle critiche in Penrose (1990), e io replico a mia volta in Davis (1993).
8. Per altre informazioni in proposito e altro materiale bibliografico si veda Gödel (1990), p. 296.

BIBLIOGRAFIA

Aiton, E.J., *Leibniz: A Biography*, Adam Hilger Ltd., Bristol-Boston, 1985.

Baker, G.P. e Hacker, P.M.S., *Frege: Logical Excavations*, Oxford University Press, New York, 1984, e Basil Blackwell, Oxford, 1984.

Barret-Ducrocq, F., *Love in the Time of Victoria*, Penguin Books, New York, 1992.

Benacerraf, P., e Putnam, H., *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, 2ª ediz., Cambridge University Press, London-New York, 1983.

Boole, G., *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, Macmillan, Barkley & Macmillan, Cambridge (UK), 1847 [trad. it. *L'analisi matematica della logica*, a cura di M. Mugnai, Bollati Boringhieri, Torino, 1993].

–, *An Investigation of the Laws of Thought on which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Walton & Maberly, London, 1854; rist. Dover, New York, 1958 [trad. it. *Indagine sulle leggi del pensiero su cui sono fondate le teorie matematiche della logica e della probabilità*, Einaudi, Torino, 1976].

–, *A Treatise on Differential Equations*, 5ª ediz., Macmillan, Cambridge (UK), 1865.

Boolos, G., *Frege's Theorem and the Peano Postulates*, in «The Bulletin of Symbolic Logic», 1, 1995, pp. 317-26.
Bourbaki, N., *Eléments d'histoire des mathématiques*, 2ª ediz., Hermann, Paris, 1969.
Brouwer, L.E.J., *Collected Works*, vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1975.
–, *Life, Art, and Misticism*, in «Notre Dame Journal of Formal Logic», 37, 1996, pp. 389-429 (trad. ingl. di W.P. van Stigt). Si veda anche la Nota introduttiva del traduttore (pp. 381-87).
Browder, F. (a cura di), *Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems*, in «Proceedings of Symposia on Pure Mathematics», vol. XXVIII, American Mathematical Society, Providence, 1976.
Burks, A.W., e Burks, R.S., *The ENIAC: First General-Purpose Electronic Computer*, in «Annals of the History of Computing», 3, 1981, pp. 310-99.
Bynum, T.W. (a cura di), *Conceptual Notation and Related Articles, by G. Frege*, Oxford University Press, London-New York, 1972.
Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen*, a cura di E. Zermelo, Springer, Berlin, 1932; rist. Hildesheim, Olms, 1962 [trad. it. parziale in G. Cantor, *La formazione della teoria degli insiemi*, a cura di G. Rigamonti, Sansoni, Firenze, 1992; e G. Cantor, *Lettere filosofiche*, a cura di G. Rigamonti, in «Annali dell'Università di Ferrara», n.s., XXXIV, 1994].
–, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Open Court, La Salle, Ill., 1941 (trad. dal tedesco di P.E.B. Jourdain).
Carpenter, B.E., e Doran, R.W., *the Other Turing Machine*, in «Computer Journal», 20, 1977, pp. 269-79.
Ceruzzi, P.E., *Reckoners, the Prehistory of the Digital Computer, from Relays to the Stored Program Concept, 1933-1945*, Greenwood Press, Westport, Ct., 1983.
Constable, R.L., e altri, *Implementing Mathematics with the Nuprl [sic] Proof Development System*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1986.
Couturat, L., *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Alcan, Paris, 1901; rist. Georg Olms, Hildesheim, 1961.

Craig, G.A., *Germany 1866-1945*, Oxford University Press, London-New York, 1978.

Daly, D.C., *The Leaf that Launched a Thousand Ships*, in «Natural History», 105, gennaio 1966, pp. 24-32.

Dauben, J.W., *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1979.

–, *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odissey*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1995.

Davis, M. (a cura di), *The Undecidable Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, New York, 1965.

–, *Why Gödel Didn't Have Church's Thesis*, in «Information and Control», 54, 1982, pp. 3-24.

–, *Mathematical Logic and the Origin of Modern Computers*, in «Studies in the History of Mathematics», Mathematical Association of America, Washington, 1987, pp. 137-65; rist. in *The Universal Turing Machine – A Half Century Survey*, a cura di R. Herker, Verlag Kemmerer & Unverzagt, Hamburg-Berlin, 1988, e Oxford University Press, London-New York, 1988.

–, *Is Mathematical Insight Algorithmic?*, in «Behavioral and Brain Sciences», 13, 1990, pp. 659-60.

–, *How Subtle is Gödel's Theorem? More on Roger Penrose*, in «Behavioral and Brain Sciences», 16, 1993, pp. 611-12.

–, e Hersh, R., *Nonstandard Analysis*, in «Scientific American», 226, 1972, pp. 78-86.

– –, *Hilbert's 10th Problem*, in «Scientific American», 229, 1973, pp. 84-91.

–, Sigal, R., e Weyuker, E., *Computability, Complexity, and Languages*, 2ª ediz., Academic Press, New York, 1994.

Dawson, J.W., Jr., *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, A.K. Peters, Wellesley, Mass., 1997.

Dummett, M., *Frege: Philosophy of Language*, 2ª ediz., Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1981 [trad. it. *Filosofia del linguaggio. Saggio su Frege*, Marietti, Genova, 1983].

Edwards, C.H., Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer, New York, 1979.

Euclide, *Elementi*, trad. it. a cura di M. Frajese, UTET, Torino, 1970.

Feferman, S., *Does Mathematics Need New Axioms?*, in «American Mathematical Monthly», 106, 1999, pp. 99-111.

Frege, G., *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Fremdsprache des reinen Denkens*, L. Nebert, Halle a. S., 1879 [trad. it. *Ideografia*, in G. Frege, *Logica e aritmetica*, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino, 1967].

–, *Über Sinn und Bedeutung*, in «Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik», n.s., 100, 1892a, pp. 25-50 [trad. it. *Senso e denotazione*, in A. Bonomi (a cura di), *La struttura logica del linguaggio*, Bompiani, Milano, 1973]. Trad. ingl. in *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, a cura di P. Geach e M. Black, Blackwell, Oxford, 1952.

–, *Rezension von: Georg Cantor, Zur Lehre vom Transfiniten*, in «Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik», n.s., 100, 1892b, pp. 269-72.

–, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Meiner, Hamburg, 1976 [trad. it. *Alle origini della nuova logica: carteggio scientifico con Hilbert, Husserl, Peano, Russell, Vailati e altri*, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino, 1983].

–, *Tagebuch 1924*; recentemente pubblicato a cura di G. Gabriel e W. Kienzler nella «Deutsche Zeitschrift für Philosophie», 42, 6, 1994, pp. 1057-98; trad. ingl. (di R.L. Mendelsohn) *Diary: Written by Professor Dr. Gottlob Frege in the Time from to 10 March to 9 April 1924*, in «Inquiry», 39, 1996, pp. 303-42.

Geiss, I. (a cura di), *July 1914: The Outbreak of the First World War, Selected Documents*, Scribner, New York, 1967.

Gödel, K., *Collected Works*, a cura di S. Feferman e altri, 3 voll., Oxford University Press, London-New York, vol. I, *Publications 1929-1936* (1986); vol. II, *Publications 1938-1974* (1990); vol. III, *Unpublished Essays and Lectures* (1995) [ed. it. a cura di E. Ballo, G. Lolli e C. Mangione, *Opere*, Bollati Boringhieri, Torino: vol. I, *1929-1936* (1999); vol. II, *1938-1974* (2002); vol. III, in preparazione].

Goldstine, H.H., *The Computer from Pascal to von Neumann*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1972.

Grattan-Guinness, I., *Towards a Biography of Georg Cantor*, in «Annals of Science», 27, 1971, pp. 345-91.
Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1935; rist. 1970.
–, e Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928.
Hinsley, F.H., e Stripp, A. (a cura di), *Codebreakers: The Inside Story of Bletchley Park*, Oxford University Press, Oxford-New York, 1993.
Hodges, A., *Alan Turing: The Enigma*, New York, Simon & Schuster, 1983 [trad. it. *Storia di un enigma. Vita di Alan Turing 1912-1954*, Bollati Boringhieri, Torino, 1991].
Hofmann, J.E., *Leibniz in Paris 1672-1676*, Cambridge University Press, London, 1974.
Huber, K., *Leibniz*, R. Oldenburg Verlag, München, 1951.
Huskey, V.R., e Huskey, H.D., *Lady Lovelace and Charles Babbage*, in «Annals of the History of Computing», 2, 1980, pp. 299-329.
Kagan, D., *On the Origins of War and the Preservation of Peace*, Doubleday, New York, 1995.
Kinealy, C., *How Politics Fed the Famine*, in «Natural History», 105, gennaio 1996, pp. 330-35.
Kluge, E.H.W., *Frege, Leibniz et alia*, in «Studia Leibniziana», 9, 1977, pp. 266-74.
Knuth, D.E., *Von Neumann's First Computer Program*, in «Computer Surveys», 2, 1970, pp. 247-60.
Kreisel, G., *Kurt Gödel: 1906-1978*, «Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society», vol. XXVI, 1980, pp. 149-224; errata corrige vol. XXVII, 1981, p. 697.
Lavington, S., *Early British Computers*, Digital Press, Bedford, Mass., 1980.
Lee, J.A.N., *Computer Pioneers*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, Ca., 1995.
Leibniz, G.W., *Mathematische Schriften*, a cura di C.I. Gerhardt, 7 voll., Berlin (voll. I-II) e Halle (voll. III-VII), 1849-1863; rist. anast. Georg Olms, Hildesheim, 1962.
–, *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, a cura di C.I. Gerhardt, 7 voll., Weidmannsche Buchhandlung, Berlin, 1875-1890; rist. anast. Georg Olms, Hildesheim, 1978.
Lewis, C.I., *A Survey of Symbolic Logic*, Dover, New York,

1960 (versione riveduta e corretta dei primi quattro capitoli dell'edizione originale di Berkeley, University of California Press, 1918).

MacHale, D., *George Boole: His Life and Work*, Boole Press, Dublin, 1985.

Mancosu, P., *From Brouwer to Hilbert*, Oxford University Press, London-New York, 1998.

Marcus, S., *Engels, Manchester, and the Working Class*, W.W. Norton, New York, 1974.

Mates, B., *The Philosophy of Leibniz: Metaphysics & Language*, Oxford University Press, London-New York, 1985.

McCulloch, W.S., e Pitts, W., *A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity*, in «Bulletin of Mathematical Biophysics», 5, 1943, pp. 115-33. Rist. in McCulloch, W.S., *Embodiment of Mind*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1965, pp. 19-39.

Meschkowski, H., *Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung*, Biographisches Institut, Mannheim, 1983.

Metropolis, N., e Worlton, J., *A Trilogy of Errors in the History of Computing*, in «Annals of the History of Computing», 2, 1980, pp. 49-59.

Parkinson, G.H.R., *Leibniz: Logical Papers*, Oxford University Press, London-New York, 1966.

Penrose, R., *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, London-New York, 1989 [trad. it. *La mente nuova dell'imperatore*, Rizzoli, Milano, 1992].

–, *The Nonalgorithmic Mind*, in «Behavioral and Brain Sciences», 13, 1990, pp. 692-705.

Poincaré, H., *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1908 [trad. it. *Scienza e metodo*, Einaudi, Torino, 1997].

Purkert, W., e Ilgauds, H.J., *Georg Cantor: 1845-1918*, Vita mathematica, vol. I, Birkhauser, Stuttgart, 1987.

Randell, B. (a cura di), *The Origins of Digital Computers, Selected Papers*, 3ª ediz., Springer, New York, 1982.

Reid, C., *Hilbert-Courant*, Springer-Verlag, New York, 1986 (pubblicato in origine in due volumi: *Hilbert*, 1970, e *Courant in Göttingen and New York: The Story of an Improbable Mathematician*, 1976).

Rucker, R., *Infinity and the Mind. The Science and Philosophy*

of the Infinite, Birkhauser, Boston, 1982 [trad. it. *La mente e l'infinito*, Muzzio, Padova, 1992].
Searle, J.R., *I Married a Computer*, in «The New York Review of Books», 8 aprile 1999, pp. 34-38.
Sieg, W., *Hilbert's Programs, 1917-1922*, in «Bulletin of the Association for Symbolic Logic», 5, 1999, pp. 1-44.
Siekmann, J., e Wrightson, G. (a cura di), *Automation of Reasoning*, vol. I, Springer, New York, 1983.
Sluga, H., *Heidegger's Crisis. Philosophy and Politics in Nazi Germany*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1993.
Smith, D.E. (a cura di), *A Source Book in Mathematics*, Mc-Graw-Hill, New York, 1929.
Stein, D., *Ada: A Life and a Legacy*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1987.
Stern, N., *From Eniac to Univac: An Appraisal of the Eckert Mauchly Machines*, Digital Press, Bedford, Mass., 1981.
Swoyer, C., *Leibniz's Calculus of Real Addition*, in «Studia Leibniziana», 26, 1994, pp. 1-30.
The Encyclopaedia Britannica, Cambridge University Press, Cambridge (UK), 11ª ediz., 1910-1911.
Tuchman, B.W., *The Guns of August*, Macmillan, New York, 1962 e 1988.
Turing, A., *On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem*, in «Proceedings of the London Mathematical Society», serie seconda, 42, 1936, pp. 230-67; errata corrige in 43, 1937, pp. 544-46. Rist. in Davis (1965), pp. 116-54.
–, *Mechanical Intelligence*, in *Collected Works of A.M. Turing* (a cura di D.C. Ince), North-Holland, Amsterdam, 1992 [trad. it. *Intelligenza meccanica*, a cura di G. Lolli, Bollati Boringhieri, Torino, 1994].
Van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967.
Van Stigt, W.P., *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland, Amsterdam, 1990.
Von Neumann, J., *First Draft of a Report on the EDVAC*, Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania, 1945 (prima pubblicazione a stampa in Stern, 1981, pp. 177-246).

–, *Collected Works (1903-1957)*, a cura di A.H. Taub, 6 voll., Macmillan, New York, 1961-1963, vol. V, 1963.

Weingartner, P., e Schmetterer, L. (a cura di), *Gödel Remembered*, Napoli, Bibliopolis, 1983.

Welchman, G., *The Hut Six Story*, New York, McGraw-Hill, 1982.

Weyl, H., *David Hilbert and His Mathematical Work*, in «Bulletin of the American Mathematical Society», 50, 1944, pp. 612-54.

Whitehead, A.N., e Russell, B., *Principia Mathematica*, vol. I, 2ª ediz., Cambridge University Press, London-New York, 1925.

Whitemore, H., *Breaking the Code*, Samuel French Ltd., London, 1988.

Zach, R., *Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the Development of Propositional Logic*, in «Bulletin of Symbolic Logic», 5, 1999, pp. 331-36.

INDICE ANALITICO