GIANFRANCO BASTI

LOGICA II: LOGICHE MODALI E INTENSIONALI

Parte III:
Teoria delle classi, dell’identità, delle relazioni. Teorie estensionali e intensionali del significato Teorie logica e ontologica della predicazione

Roma 2008

11 Logica delle classi e identità [BO, pp.117ss.]

11.1 Singolarità e identità nel calcolo dei predicati [GA1, pp.59ss.]

- Come già ricordato più volte, il calcolo proposizionale e dei predicati ha tutta la sua **potenza,** per la formalizzazione della scienza moderna, e tutto il suo **limite,** per la formalizzazione della filosofia, nel fatto di esser stato elaborato appositamente per escludere dalla **logica formale come calcolo** ogni riferimento **ontologico**.
- In particolare, per escludere ogni riferimento alla **teoria degli universali logici** come **enti di pensiero,** e del loro **fondamento reale extra-mentale ed extra-linguistico** mediante la teoria dei **generi naturali** o **nature (essenze)** dei corpi intesi come **enti naturali**.
- Infatti, grazie a quella teoria, nella metafisica medievale, almeno quella di ispirazione aristotelica, si poteva distinguere fra:

1. **Universale generico o «universale-uno-di-molti»,** grammaticalmente espresso in **LN** dalla copula "è" più a destra di essa:
   a. O da un **nome comune** (= **predicazione nominale)** preceduto dall'articolo indeterminativo (Socrate è **un** uomo)[1] che ha come fondamento reale (denota) un particolare **genere o specie** di individui, ovvero, aristotelicamente parlando, una **sostanza seconda** (p.es., l'essenza comune al genere dei "mammiferi", o alla specie dei "gatti", dei "cani", etc.);
   b. O da un **aggettivo** (=**predicazione attributiva**) che ha come fondamento reale (denota) una particolare **proprietà** di un individuo e/o genere di individui, ovvero, aristotelicamente parlando, di un **accidente** di una particolare sostanza, prima (individuo) o seconda (genere). P.es., "l'essere bipede" comune a tutti gli uomini, ovvero al genere umano; o "l'essere filosofo" proprio di Socrate, etc..
2. **Universale individuale o «universale-uno-di-uno»,** grammaticalmente espresso da un nome "proprio" (p.es., "Platone", o "Cristoforo Colombo") e/o da un "termine descrittivo", ovvero un'espressione composta da più parole, precduta dall'articolo determinativo (p.es., "il maestro di Aristotele" o "lo

scopritore dell’America”), che ha come fondamento reale non la “natura” o genere/specie cui líndividuo appartiene, ma **l’essenza individuale** di un **singolo individuo**, ovvero aristotelicamente parlando, di una **sostanza prima**.

3. Conseguentemente, nella logica formale medievale si distingueva fra **quantificazione universale e particolare** per gli universali generici (uno-di-molti), e **quantificazione singolare** (uno-di-uno) per gli universali individuali.

- È chiaro che, in ogni caso, metafisica medievale a parte, “nomi propri” e “termini descrittivi”, come pure la “quantificazione singolare”, hanno un ruolo fondamentale in ogni **LN**, per il problema della **denotazione** di un termine (nome proprio) mediante la relativa **connotazione** (descrizione definita).
- Essi infatti creano un’**infinità di problemi** in semantica formale, irrisolvibili finché limitiamo l’analisi logica delle espressioni referenziali, sia nei linguaggi ordinari che formalizzati, alla sola indagine formale, **semantica e sintattica.**Tali problemi sono infatti legati ultimamente ai teoremi di Gödel e come tali irresolvibili finché non li trattiamo anche in **pragmatica** (=teoria causale della referenza)
- → tentativo fallito di Frege di risolvere il problema della **referenza dei termini** in semantica formale mediante la sua **teoria descrittiva** della referenza.

- → Formalizzazione della **quantificazione singolare** ($\exists!x$: "esiste un unico x tale che…") nel calcolo classico dei predicati, senza far riferimento ai generi ontologici, ma solo all'entità astratta delle classi, attraverso la seguente esplicitazione di questa quantificazione.
- Supponiamo [Cfr. GA, p.62ss.] di voler rendere nel **L** del calcolo dei predicati l'espressione di **LN**:

«Esiste un unico filosofo»

- A tale scopo è sufficiente dichiarare:

«Esiste almeno un *x* tale che è filosofo e per ogni *y* che è filosofo *y* è uguale a *x*»

Ovvero, formalizzando:

$$\exists x\Big(Fx \land \forall y\big(Fy \rightarrow y = x\big)\Big)$$

- Se prendiamo il simbolo della quantificazione singolare, $\exists!x$, come abbreviazione della funzione proposizionale precedente, generalizzata a qualsiasi simbolo di predicato, allora la precedente formula di **LN** può essere così formalizzata:

$$\exists!x\, Fx$$

- Come vedremo subito, una tale espressione può essere presa come denotante **una classe ad un solo membro** e tutti i nomi propri e/o i termini descrittivi singolari possono essere presi come denotanti classi di questo tipo.

- → Le espressioni di **LN** che predicano proprietà di nomi propri, p.es.:

  «Socrate è filosofo»

  possono essere perciò espresse in espressioni del tipo: «Esiste un unico individuo caratterizzato dalla proprietà di essere Socrate e tale individuo è filosofo», che formalizzata diventa:

$$\exists! x \left(Sx \wedge Fx \right)$$

- A questo punto, possiamo rendere formalmente anche le **descrizioni definite** in quanto connotano termini singolari come nell'espressione di **LN**:

  «Platone è il maestro di Aristotele»

  Che formalizzata diventa:

$$\exists! x \left(Px \wedge \exists! y \left(Ay \wedge M\left(x, y\right) \right) \right)$$

- Come si vede è possibile esprimere nella logica del linguaggio dei predicati termini di qualsivoglia complessità di **LN** usando semplicemente **variabili, quantificatori e il segno d'identità,** naturalmente a patto di **svuotare di significato ontologico** che queste espressioni hanno in **LN**, nella metafisica medievale che usava **LN** e che invece possono tornare ad avere nel linguaggio di un'ontologia formale.
- Un'ontologia che, formalizzando, la teoria medievale degli universali, eviti i **vicoli ciechi** in cui questa teoria cadde alla fine del Medio Evo**.**

11.2 Predicazione e appartenenza di classe [BO, pp.117-9]

11.2.1 Classi ed estensione dei predicati

- Il calcolo dei predicati in cui essi svolgono il ruolo formale di **relazioni fra termini** trovano la loro più naturale esplicazione nella nozione di **classe.**
- Come nella gnoseologia del senso comune ad ogni predicato del linguaggio corrisponde un concetto, logicamente parlando una **intensione** che determina per ciascuno ed una comunità linguistica il "ciò che si intende" con un predicato, nel contesto del calcolo classico dei predicati ad ogni predicato corrisponde la sua **estensione,** formalmente – nel calcolo del primo ordine – la collezione degli argomenti che sono

nomi denotanti oggetti individuali, che rendono **vero** il predicato. Formalmente, si tratta della collezione degli argomenti del predicato per cui la **funzione di verità** associata al predicato acquista valore 1 e non 0.

- L'**estensione** di un predicato così definita è ciò che denotiamo col nome di **classe.** Nella teoria delle classi di Frege-Russell, ad ogni predicato corrisponde, o, se vogliamo, ogni predicato determina una classe secondo il seguente, cosiddetto, **assioma di comprensione**:

$$\exists \mathbf{A} \forall x \; x \in \mathbf{A} \leftrightarrow Ax \qquad (1)$$

- Dove **A** (in maiuscolo, grassetto) è un segno di (termine che denota una) classe e *A* è il segno del predicato corrispondente alla classe **A,** mentre $\in$ è un predicato terminale bi-argomentale che denota la **relazione di appartenenza di classe,** nel senso estensionale di "essere elemento di"**.** È chiaro che sebbene *x* e **A** siano due variabili terminali essi appartengono a **due gradi semantici** distinti, con **A** appartenente ad un grado superiore.
- Naturalmente il predicato bi-argomentale di appartenenza può connettere non solo un nome di individuo e un nome di classe, ma anche due **nomi che denotano classi**,

appartenenti a due gradi semantici diversi, nel qual caso la formula significa che una classe **è elemento** dell'altra, ovvero che quella è **sottoclasse** di questa.

- Il fatto che una classe possa essere membro di un'altra, significa che essa è una molteplicità ridotta a **unità.** Quindi, la classe è un **oggetto logico-astratto** e non va confusa con la collezione di oggetti reali che essa denota. P.es., la classe astratta delle lucertole, relativa al predicato "essere lucertola" non va confusa col **genere naturale reale** corrispondente, ovvero **la specie delle lucertole**, che è composta da milioni e milioni di esemplari e che come tale non può essere membro unitario di alcunché. Ovviamente si può predicare l'appartenenza di un genere a un altro, p.es., della specie delle lucertole al genere dei rettili. Ma questa appartenenza **non vuol dire assolutamente "essere elemento di (*membership*)"**…
- → Le **regole logiche** mediante le quali si decide dell'appartenenza ad una classe nel senso "dell'essere elemento di…" (p.es., di un feto alla classe degli uomini), non sono le **regole ontologiche** mediante le quali si decide dell'appartenenza ad un genere di un determinato ente (p.es., di un feto al genere umano).
    - **La regola logica fondamentale** per decidere dell'appartenenza di un certo elemento ad una data classe è che esso **soddisfi i(l) predicati(o) che deter-**

mina l’appartenenza a quella classe. P.es., in biologia per appartenere alla classe degli umani occorre soddisfare un certo numero di predicati e le relative proprietà denotate da quei predicati, come “avere il genoma tipico della specie umana”, “avere il sistema immunologico tipico della specie umana”, “avere la corteccia cerebrale tipica delle specie umana”.

  - **La regola ontologica fondamentale** per decidere dell’appartenenza di un certo individuo ad un medesimo genere biologico è quella di **condividere** con gli altri appartenenti al medesimo genere, **un medesimo concorso causale** che determina in maniera necessitante l’esistenza di ciascuno come appartenente a quel genere → le proprietà che determinano l’appartenenza alla classe esistono virtualmente (in potenza attiva) nel concorso causale e vengono attualizzate progressivamente.

- E’ chiaro che dal **punto di vista ontologico** con $\in$, anche nelle intenzioni di Peano che inventò il simbolo come abbreviazione del termine greco esti terza persona del presente del verbo essere, si intende esprimere formalmente la copula che connette soggetto-predicato in ogni enunciato predicativo.

- Così, p.es., all’espressione di **LN** “il cielo *è* azzurro”, corrisponde simbolicamente, e biunivocamente, una formula di appartenenza come $c \in \mathbf{A}$ che fornisce la semantica estensionale della formula del calcolo dei predicati *Ac*, dove invece manca questa corrispondenza biunivoca con **LN.**
- Naturalmente, nulla di male a interpretare il semantema “essere” come relazione formale di appartenenza nel senso di *membership*: questo è certamente uno dei tanti sensi che esso ha in **LN,** diventato preponderante nella scienza moderna dopo la nascita del concetto matematico di “funzione”.
- Il problema è l’atteggiamento ideologico moderno di ridurre lo “è” di **LN** alla sola funzione linguistico-formale di copula. Far questo significa seguire un’ontologia di tipo kantiano con la quale, ovviamente, molti contenuti fondamentali del semantema “essere” di **LN** vengono eliminati.
- P.es., innanzitutto si elimina la possibilità di formalizzare una metafisica naturalista — di qui l’impossibilità, fra le altre, di una interpretazione realista della nozione di “causa”, da cui l’impossibilità di ogni prova dell’esistenza di un Principio Assoluto da cui l’esistenza del mondo causalmente dipenda, etc. Ma questo riduzionismo metafisico elimina anche tutti i contenuti di un’ontologia naturalista da associare alle

scienze naturali, ovvero si forza un’interpretazione ontologica puramente fenomenista delle scienze, alla E. Mach, per intenderci, un’interpretazione su cui la gran parte degli scienziati stessi non sarebbe d’accordo.

- E’ chiaro che tutte le espressioni dell’ordinario calcolo dei predicati hanno un loro corrispettivo nel **calcolo delle classi,** uso dei quantificatori incluso. Così le proposizioni a **quantificazione universale** del calcolo dei predicati si possono esprimere nei in proposizioni del **calcolo quantificato delle classi.**

P.es.: la proposizione di **C:** $\forall x \left(Ux \to Mx \right)$ diviene nel **calcolo delle classi:**

$$\forall x \left(\left(x \in \mathbf{U} \right) \to \left(x \in \mathbf{M} \right) \right)$$

Il che significa che la classe degli uomini **U** è sottoclasse della (inclusa nella) classe dei mortali **M,** ovvero: <**U**$\subseteq$ **M**>

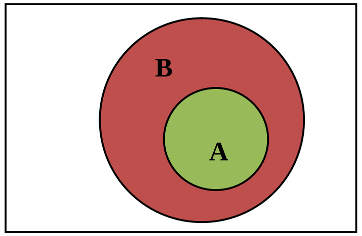
11.2.2 Principali relazioni fra classi [BO, 120ss.]

- **Le principali relazioni** fra le classi hanno sempre un loro corrispettivo nella logica dei predicati e delle proposizioni, tanto da poter essere definite nei termini di queste.

Inoltre, possono essere agevolmente rappresentate graficamente mediante i cosiddetti **diagrammi di Venn:**

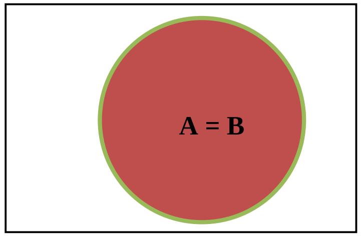
1. **Inclusione** ($\subseteq$): $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} =: \forall x\left(\left(x \in \mathbf{A}\right) \rightarrow \left(x \in \mathbf{B}\right)\right)$

Se tutti gli elementi della prima classe sono inclusi nella seconda, la prima è **inclusa** nella seconda



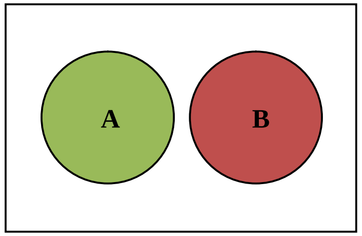
2. **Uguaglianza (=):** $\mathbf{A}=\mathbf{B} =: \forall x\left(\left(x \in \mathbf{A}\right) \leftrightarrow \left(x \in \mathbf{B}\right)\right)$

Se l'inclusione delle classi è reciproca, le due classi sono dette **uguali.**



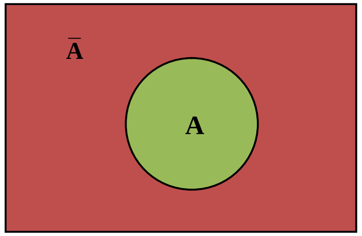
3. **Esclusione ($\not\subset$):** $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B} =: \forall x\left(\left(x \in \mathbf{A}\right) \rightarrow \neg\left(x \in \mathbf{B}\right)\right)$

Se nessun elemento della prima classe è incluso nella seconda, la prima **esclude** la seconda.



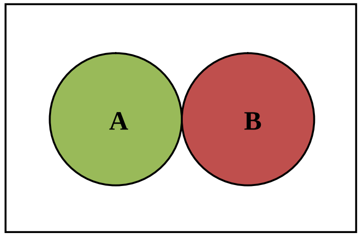
4. **Complemento ($\bar{\mathbf{A}}$):** $\left(x \in \bar{\mathbf{A}}\right) =: \neg\left(x \in \mathbf{A}\right)$

La classe $\bar{\mathbf{A}}$ è detta **complemento** della classe **A,** se tutti gli elementi che appartengono ad $\bar{\mathbf{A}}$ non appartengono ad **A** e viceversa.



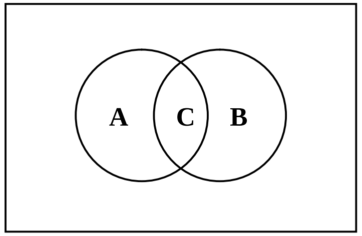
5. **Somma (∪):** $\left(x \in \left(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}\right) =: \left(x \in \mathbf{A}\right) \vee \left(x \in \mathbf{B}\right)\right)$

La **somma** o **unione** di due classi è la classe che contiene gli elementi di ambedue.



6. **Prodotto (∩):** $\left(x \in \left(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}\right) =: \left(x \in \mathbf{A}\right) \wedge \left(x \in \mathbf{B}\right)\right)$

Il **prodotto** o **intersezione C** di due classi è la classe degli elementi comuni ad ambedue.



- Esiste uno stretto rapporto fra **logica delle classi** e **delle proposizioni,** tanto che molti degli assiomi del **calcolo delle proposizioni** valgono anche per il **calcolo delle classi.**

- I rapporti fra **connettivi proposizionali** e **connettivi di classe** sintetizzano bene questo stretto rapporto fra i due calcoli:
  $\leftrightarrow / =$ **equivalenza/uguaglianza**
  $\neg / \overline{}$ **negazione/complementazione**
  $\rightarrow / \subseteq$ **implicazione/inclusione**

$\vee/\cup$ **disgiunzione (somma)/unione**
$\wedge/\cap$ **congiunzione (prodotto)/intersezione**

- La classe **universale U** è la classe che contiene come elementi tutte le classi ed ha proprietà simili alla **verità** nella logica delle proposizioni.

  1. **Ogni classe A** è inclusa nella classe universale **U** / **Ogni proposizione *p***, vera o falsa che sia, implica una proposizione **vera** 1
     $\forall \mathbf{A}\left(\mathbf{A} \subseteq \mathbf{U}\right) \quad / \quad \forall p\left(p \supset 1\right)$

  2. L'**unione** di una classe qualunque **A** e della classe universale **U** è uguale alla classe universale / La **somma (disgiunzione)** di una qualunque proposizione *p*, vera o falsa, con una proposizione vera 1 equivale ad una proposizione vera.
     $\mathbf{A} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U} \quad / \quad \left(p \vee 1\right) \leftrightarrow 1$

  3. L'**intersezione** della classe universale **U** con una qualsiasi classe **A** è uguale a questa classe / La **congiunzione (prodotto)** di una qualsiasi proposizione *p* con la proposizione vera 1 equivale alla proposizione *p* stessa (sarà una propo-

sizione vera, se *p* è vera, sarà una proposizione falsa se *p* è falsa)

$\mathbf{A} \cap \mathbf{U} = \mathbf{A} \quad / \quad (p \wedge 1) \leftrightarrow p$

- La **classe vuota (∅)** è la classe cui non appartiene alcun elemento. Di per sé una classe, per esistere logicamente, deve contenere almeno **un elemento**. P.es., la classe dei satelliti di Venere non esiste, perché il pianeta Venere non ha alcun satellite. Tuttavia la classe vuota è un costrutto logicamente importante per vari motivi.
  - Dal punto di vista della fondazione dei numeri come “classi di classi” il numero “0” è definito come “classe di tutte le classi vuote”, come il numero “1” è definito come “classe di tutte le classi con un elemento”, il “2” come “classe di tutte le classi a due elementi”, etc.
  - Inoltre la “classe vuota” è la classe contenuta in ogni classe **ben definita** perché è la sotto-classe che contiene tutti gli elementi che **non appartengono** a quella classe, ovvero gli elementi che appartengono alla classe complementare di quella data. Il che è come dire che la classe è ben costruita per discriminare fra gli elementi che vi appartengono e quelli che non vi appartengono.

- Ma, soprattutto, la classe vuota ha delle proprietà del tutto simili a quelle della **falsità** in logica delle proposizioni. Analogamente, ma in maniera contrapposta, alle corrispondenze che abbiamo trovato fra la classe **U** in logica delle classi e la **V (1)** in logica delle proposizioni, valgono le seguenti corrispondenze fra la classe ∅ e la **F (0)** in logica delle proposizioni:

  1. **Ogni classe A include** la classe vuota ∅ / **La proposizione falsa 0 implica** qualsiasi ***p***, vera o falsa che sia:
     $\forall \mathbf{A}\left(\varnothing \subseteq \mathbf{A}\right) \quad / \quad \forall p\left(0 \supset p\right)$

  2. L'**unione** di una classe qualunque **A** e della classe vuota ∅ è uguale alla classe **A** / La **somma (disgiunzione)** di una qualunque proposizione *p*, vera o falsa, con una proposizione vera 0 equivale alla proposizione *p* (sarà una proposizione vera, se *p* è vera, sarà una proposizione falsa se *p* è falsa).
     $\mathbf{A} \cup \varnothing = \mathbf{A} \quad / \quad \left(p \vee 0\right) \leftrightarrow p$

  3. L'**intersezione** della classe vuota ∅ con una qualsiasi classe **A** è uguale alla classe vuota ∅ / La **congiunzione (prodotto)** di una qualsiasi proposizione *p*

con la proposizione falsa 0 equivale alla proposizione falsa 0.

$\mathbf{A} \cap \varnothing = \varnothing \quad / \quad (p \wedge 0) \leftrightarrow 0$

11.2.3 Classi e insiemi

- Infine è importante sottolineare quale sia la differenza fondamentale fra **classi** e **insiemi.**
- Come sappiamo, almeno nella **teoria elementare** delle classi che stiamo qui illustrando, le classi sono **costituite** mediante un assioma dal significato molto intuitivo, quale il già citato **assioma di comprensione** (cfr. §11.2.1, assioma (1)).
- Viceversa, gli insiemi sono **costruiti** (se ne **dimostra** cioè l'esistenza) attraverso il **potente teorema dell'insieme potenza** di Cantor. Secondo questo teorema "ogni insieme **A** è sottoinsieme del suo insieme-potenza **PA"**, dove **PA** è l'insieme di tutti i sottoinsiemi costruibili combinando gli elementi di **A**. Se dunque la cardinalità (= il numero degli elementi) di **A** è *n*, la cardinalità di **PA** sarà 2^n.

- P.es., dato un insieme **A** di quattro elementi {a, b, c, d}, esso può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme-potenza di **A**, **PA=B**, composto di sedici elementi. **B** sarà composto cioè da sottoinsiemi costituiti da tutte le combinazioni possibili degli elementi di **A**: nessuno, a uno a uno, a due a due, a tre a tre, e, infine, a quattro a quattro, cioè **A**: {{∅}, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}, {a,b,c,d}}, in totale 16 elementi (sottoinsiemi), fra i quali si trova il nostro insieme **A** di partenza, di cui così abbiamo dimostrato l'esistenza. Ovviamente, a sua volta, il nostro insieme potenza, **B,** composto di 16 elementi sarà sottoinsieme del suo insieme-potenza **PB=C**, nel nostro caso con una cardinalità di 2^{16} elementi, e così via all'infinito…

- Come si vede, esiste uno stretto rapporto fra **insieme** e oggetti **matematici, costitutivamente** e non solo **intuitivamente**.

    - **Intutitivamente** tale relazione esiste perché ogni oggetto geometrico può considerarsi come un insieme connesso di punti e/o ogni numero un insieme unitario di unità. Questa intuizione fu all'origine dell'idea di usare la teoria degli insiemi come **metalinguaggio** delle teorie matematiche, una volta che, dopo la dimostrazione del carattere ipotetico-deduttivo e non apodittico delle geometrie, divenne indispensabile **dimostrare la coerenza** delle teorie.

- **Costitutivamente** tale relazione esiste perché fra ogni coppia di grandezze geometriche e/o numeriche esiste una relazione di **maggiorazione (≥)-minorazione (≤) fra grandezze**, esattamente come fra gli insiemi, in quanto costruiti attraverso il teorema di Cantor, esiste un'**intrinseca relazione di ordinamento quantitativo** legata ad una ancora più fondamentale relazione di **maggiorazione($\succeq$)-minorazione ($\preceq$) fra insiemi** (**PA** avrà certamente una cardinalità maggiore di **A** e viceversa) che presiede alla relazione di **inclusione** fra insiemi. Delle relazioni di fondazione di un ordinamento quantitativo che di per sé non troviamo nell'analoga fondazione della relazione di **inclusione** mediante la nozione di **classe**.
  P.es., la classe dei "laureati" è sicuramente inclusa in quella degli "universitari" perché l'essere (stato) universitario è condizione necessaria per laurearsi. Ma da questa inclusione non ho alcuna informazione sul valore relativo delle grandezze coinvolte, che potrebbero essere addirittura equivalenti. Tali incer-

tezze mancano in una teoria costruttiva degli insiemi (→ teoria delle classi ha un ambito più vasto di applicazione della teoria degli insiemi).

- Così, se, con il teorema di Cantor, avessimo potuto dimostrare anche l'esistenza di insiemi-limite, quale il **continuo matematico** e più ancora dell'insieme **U**, l'insieme universale — e non soltanto supporlo come esistente, come avviene con la classe **U —**, si capisce la potenza di un tale metodo, se ricordiamo la stretta relazione fra **U** e la **Verità** in logica. Per questo talvolta l'insieme (classe) universale è anche denotato direttamente con **V.**

- **Viceversa**, sappiamo come ogni tentativo di dimostrare l'esistenza dell'insieme universale **U** porta necessariamente ad un'**antinomia**, tanto con i cardinali (l'insieme **U** infatti in quanto "universale" dovrà contenere qualsiasi altro insieme, ma in quanto "insieme", per esistere, dovrà essere necessariamente contenuto in uno di cardinalità maggiore), quanto con gli ordinali (non può esistere un insieme ordinale **massimale** infatti ogni ordinale contiene sotto di sé tutti gli ordinali minori, ma mai se stesso).

- Di qui la necessità, per garantire la costruibilità, mediante il teorema di Cantor, almeno degli insiemi di cardinalità minore di **V** di integrare la teoria degli insiemi di

Cantor con **l'assioma dell'insieme-potenza** di Von Neumann, che suppone cioè che gli insiemi potenza "troppo grandi" quelli che approssimano la cardinalità di **U**, costituiscano una **classe** e non un insieme. Si passa cioè da una teoria **costruttiva** ad una teoria **assiomatica** degli insiemi.

- Limitandoci, e di molto, ad illustrare l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi solo rispetto alla nozione di **esistenza,** le tre principali teorie assiomatiche degli insiemi sono:
    1. La teoria di Zermelo-Fraenkel (ZF) che rimuove le antinomicità della teoria semplicemente costruttiva, supponendo l'esistenza degli insiemi **minimali**, ovvero gli "individui", o **Ur-Elemente**. L'antinomicità della teoria costruttiva può essere vista non solo rispetto agli insiemi massimali, ma anche rispetto a quelli minimali. Gli "individui" infatti sono "insiemi" o no? E se sì, come la teoria costruttiva sembra implicare, come giustificarli, visto che per esistere essi dovrebbero essere **inclusi** come sotto-insiemi del loro insieme- potenza, ma esso a sua volta, per esistere, deve supporre che tutti i suoi sotto-insiemi, individui compresi, già esistano…?

2. La teoria di Von Neumann-Goedel-Bernay (NGB) che rimuove le antinomicità della teoria semplicemente costruttiva, supponendo l’esistenza degli insiemi **massimali** mediante il già citato “assioma dell’insieme-potenza”.
3. La teoria di Cohen che sceglie un’altra strada, quella di **indebolire** la nozione di **implicazione (inclusione)** in logica, sostituendola con quella di **forzatura** (*forcing*), nel senso che le premesse “forzano” non “implicano” in senso forte certe conclusioni… [per un approfondimento di questi temi, rimando al nostro libro: G. BASTI & A. L. PERRONE, *Le radici forti del pensiero debole*, Padova-Roma, 1996].

11.2.4 Teoria estensionale dell’identità

- Le strette **relazioni** fra logica delle classi, dei predicati e delle proposizioni consentono di costruire una teoria **estensionale** dell’identità, basata cioè su una teoria della significazione dei predicati che riduce l’analisi del significato dei predicati stessi alla sola analisi dell’**estensione** (ciò a cui i predicati si riferiscono) dei predicati stessi, senza considerare la loro **intensione** (ciò che si intende con quei predicati).

- Estensionalmente, due cose sono **identiche**, quando i loro nomi **denotano** (significano) **la stessa cosa.**
  P.es.: diciamo che **Marco Tullio** è identico a **Cicerone**

- Simbolo **identità**: “**=**”
  Simbolo **diversità**: “**≠**”

- Intensionalmente, due cose sono **identiche,** quando **tutti i predicati** che convengono ad una convengono anche all’altra, e viceversa.
  $(x = y) =: \forall P(Px \leftrightarrow Py)$
  $(x \neq y) =: \neg(x = y)$

- La relazione di **identità,** soddisfa alle tre relazioni, **riflessiva, simmetrica e transitiva:**
  1. **Riflessiva:** $\forall x(x = x)$
  2. **Simmetrica:** $(\forall x, y)((x = y) \rightarrow (y = x))$
  3. **Transitiva:** $(\forall x, y, z)(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z))$

11.2.5 Teoria estensionale dell’identità e classi di equivalenza

- È chiaro che la **teoria delle classi** consente una (come vedremo subito: parziale) riduzione della stessa nozione intensionale dell’identità appena vista, in termini di **equivalenza di predicati,** ad una estensionale in termini di **classi di equivalenza**, classi cioè determinate da predicati fra loro equivalenti e che quindi denotano **un’unica classe**, dato che **l’uguaglianza fra classi** si definisce nei termini della loro equivalenza, dell’avere cioè la medesima **estensione** (Cfr. slide 199). Ovvero:

$$(\exists P,Q)(\forall x,y)\big((Px \leftrightarrow Qy) \rightarrow (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})\big) \leftrightarrow (\exists P,Q)(\forall x,y)\big((\mathbf{P} = \mathbf{Q}) \wedge (x = y)\big)$$

  - Il carattere parziale di questa riduzione, diviene subito evidente quando, p.es., sostituiamo ai predicati *P* e *Q* i predicati di **LN** “essere animali razionali” ed “essere bipedi implumi”. È chiaro che ambedue questi predicati sono equivalenti e perciò determinano **un’unica classe di equivalenza**, quella appunto degli “uomini”. Il che soddisfa pienamente la suddetta formula, in senso appunto estensionale.
  - È altrettanto chiaro, però, che **il contenuto intensionale della formula** in **LN** non è pienamente soddisfatto, dato che definire descrittivamente la classe de-

gli uomini nei termini di “animali razionali” o di “bipedi implumi” non è affatto equivalente, né a livello di ciò che si intende con queste due predicazioni (livello concettuale), né a livello delle rispettive proprietà naturali cui ci riferiamo con le due distinte predicazioni (livello ontico).

- È evidente perciò che una logica di tipo intensionale rimanda necessariamente a delle **soggiacenti ontologie**, concettualiste, naturaliste e/o all’intersezione delle due, il cosiddetto **concettualismo naturalista**…

12 Cenni di logica delle relazioni

12.1 Relazioni e predicati

- La **logica delle relazioni** è la parte fondamentale della logica formale, perché la logica formale moderna, intesa come calcolo formale, è essenzialmente una **scienza delle relazioni.**
- Una relazione può essere definita **estensionalmente** in logica simbolica, come **il significato di un predicato n-argomentale**, sia esso un predicato proposizionale (non, et, vel, aut…) , sia esso un predicato terminale. Viceversa, nella logica formale un predicato può essere definito come ciò che denota una data relazione fra i suoi argomenti, siano essi termini o proposizioni.
  - Nel caso dei predicati proposizionali, il **senso** o la **connotazione** della relazione denotata dal predicato è definita estensionalmente dalle rispettive tavole di verità.
  - Nel caso dei predicati terminali, il **senso** o la **connotazione** della relazione denotata dal predicato è definita estensionalmente nei termini delle relative

classi di appartenenza degli elementi denotati dagli argomenti del predicato, nonché della classe determinata dalla relazione e delle relazioni fra queste classi.

- Lo stesso significato **intensionale** di un predicato terminale mono-argomentale, come ciò che denota una certa **proprietà** (p.es., “l’esser rosso” del sangue), può essere definito come denotazione di una **relazione a un termine,** connotabile come (il cui senso è dato dalla) **relazione di appartenenza alla classe** denotata dal predicato mono-argomentale.
- Come si vede, dal punto di vista ontologico, in tutto questo **non si esce dall’ambito linguistico**, non si fa cioè alcun riferimento né a **stati o atti mentali,** né a **oggetti extra-mentali**.

12.2 Il simbolismo della logica delle relazioni

- I simboli delle **relazioni** possiedono tutte le proprietà delle dei predicati **mono-argomentali** nel senso che **ogni relazione determina una classe,** ma con i più tutte le proprietà derivanti dal fatto che nei predicati e relazioni **pluri-argomentali**, **l’ordine degli argomenti** svolge un ruolo essenziale.

- Generalmente, denotando una generica relazione con *R*, è invalso da Russell in poi, per distinguere un simbolo di predicato da uno di relazione, **porre la relazione fra i suoi argomenti**, ovvero invece di scrivere $R(x,y)$ scrivere xRy.
- L'**antecedente** della relazione *R* denota **ciò che ha la relazione *R*** con qualche altra cosa denotata dal conseguente. Es.: "padre" nel caso in cui *R* denoti la relazione di paternità.
- Il **conseguente** della relazione *R* denota **ciò con cui qualcosa denotato dall'antecedente ha la relazione *R***. Es.: "figli(/e/o/a)" nel caso in cui la relazione *R* denoti la paternità.
- La **classe di tutti gli antecedenti** della relazione *R* viene denotata come il **dominio** della relazione.
- La **classe di tutti i conseguenti** viene denotata come il **codominio** della relazione [si noti che questa denominazione è l'opposto di quella che si usa per le funzioni ($y=f(x)$) dove è il termine passivo il **codminio *y*** ad essere evidenziato come antece-

dente (= “ciò che è funzione di”), ed è il **dominio *x*** ad occupare il posto del conseguente].

- In ogni caso, sia per le **relazioni** che per le **funzioni** l’unione del dominio e del codominio è denotato come il **campo** o **supporto** della relazione (funzione).
- La relazione **inversa** $\breve{R}$ è quella che il conseguente della relazione R ha col suo antecedente. Es.: $\breve{R}$ denota la “figliolanza” se R denota la “paternità”.
- Altre relazioni significative sono:
  1. **Simmetrica.** Quando una relazione è equivalente alla sua inversa:
     sim $R =: (\forall x, y)(xRy \leftrightarrow yRx)$ ovvero $(\forall x, y)(xRy \leftrightarrow x\breve{R}y)$

     P.es., dove R denota “amicizia”.
  2. **Riflessiva.** Quando sussiste fra qualcosa e se stesso:
     refl $\boldsymbol{R} =: (\forall x)xRx$

     P.es., dove R denota “identità”

3. **Transitiva.** Quando sussiste fra le coppie dei diversi elementi di una successione, sussiste anche fra i loro estremi:
trans R =: $\left(\forall x, y, z\right)\left(\left(xRy \wedge yRz\right) \rightarrow xRz\right)$
P.es., dove R denota "più grande di"

4. **Identica.** Quando valgono congiuntamente la relazione transitiva, simmetrica e riflessiva:
id R =: **trans** $R \wedge$ **sim** $R \wedge$ **rifl** R.

5. **Prodotto relativo.** Il prodotto di due relazioni R e Q è la relazione che esiste fra x e z se abbiamo xRy e yQz.
$\left(R \circ Q\right) xz =: \left(\exists y\right)\left(\left(xRy\right) \wedge \left(yQz\right)\right)$
P.es., dove R denota "essere fratello", Q "essere padre" e dunque il prodotto di queste due relazioni ("essere fratello di padre di") ovvero il prodotto relativo <(R○Q)>, denota la relazione "essere zio paterno". [Si noti l'uso del quantificatore esistenziale per significare che, se non esistesse almeno un termine intermedio y, commune alle due relazioni, non si darebbe prodotto].

6. **Quadrato relativo**. Il prodotto che ogni relazione ha con se stessa:
   $\boldsymbol{R}^2 =: R \circ R$

   P.es.: dove R denota “essere padre di”, R^2 denota “essere nonno paterno di” e iterando, $<R^3 =: R \circ R^2>$ denota “essere bisnonno paterno di” e più in generale:

   $R^n =: R \circ R^{n\text{-}1}$

12.3 Relazioni e funzioni descrittive

- **Infine,** molto importante per la semantica modale e quindi per la logica intensionale sono le cosiddette **funzioni descrittive**, corrispettivo nella logica delle relazioni di quelle **descrizioni definite** che abbiamo già incontrato (cfr. slide 192), quando nella logica dei predicati abbiamo affrontato il problema della **quantificazione singolare**.
- Delle funzioni descrittive si fa larghissimo uso in matematica quando si vuole denotare il **singolo valore di una funzione,** p.es. <sin *x*>, “seno di *x*”, che ha un singolo valore ben definito per ciascuna *x*.

- Generalizzando, se *R* denota la relazione di “maternità”, **<*R’y*>** connota ciò che in **LN** costituisce la sostanzializzazione in un individuo — e quindi la “nominalizzazione singolare” mediante l’articolo determinativo —, della relazione *R*, cioè “la madre di *y*” che, ovviamente, **connota un singolo *x*** (*mater semper certa est*) [o almeno lo era: oggi non è detto che la madre biologica (partoriente) coincida con quella genetica (che ha fornito l’ovulo), quindi la “relazione di maternità” *R* oggi va definita meglio, per poter definire con essa una funzione descrittiva. La “relazione di paternità”, invece, ha sempre avuto di questi problemi…].
  P.es., se *y* denota Sant’Agostino, <*R’y*> , ovvero “la madre di S. Agostino”, connota in maniera definita e quindi denota univocamente Santa Monica.

- → Siccome una funzione descrittiva connota sempre **un individuo singolo esistente**, non ha senso scrivere “il figlio di Noè”, perché Noè ha avuto molti figli, né “il padre di Adamo” perché non è mai esistito.

- Generalizzando si possono definire **funzioni descrittive che connotano classi** e non individui. Le classi, infatti, essendo oggetti astratti, logici, differentemente dai **generi naturali**, supportano quella ***reductio ad unum,*** quell’essere trattati come **oggetti**

singoli (logicamente) esistenti , che un genere naturale, invece, in quanto entità e-xtra-logica (collezione di individui naturali esistenti), “sostanza seconda, esistente non *in sé*, ma *nei molti*” assolutamente non supporta.

- Il simbolo con cui in logica si denota una **funzione descrittiva** è quello che in matematica soprattutto i fisici usano per definire “un vettore di valori”, ovvero un certo insieme di valori, in quanto costituiscono il dominio o, più spesso, il codominio di una certa funzione. Quindi in logica, data la relazione *xRy*,
  1. **Dominio di *R***: $\left\langle \vec{\mathbf{R}}\,'\,y \right\rangle$ (o anche <**sgR’***y*> (dove **sg** sta per il latino *sagitta*, “freccia”)), ovvero la classe o insieme degli {*x*} che hanno con {*y*} la relazione *R*.

     P. es., se *R* è la relazione di “paternità”, $\left\langle \vec{\mathbf{R}}\,'\,y \right\rangle$connota {*x*} che denota l’insieme dei padri, mentre {*y*} denota l’insieme dei figli.
  2. **Codominio di *R***: $\left\langle \overleftarrow{\mathbf{R}}\,'\,x \right\rangle$ (o anche <**gsR’***x*> (dove **gs** è un modo per denotare l’inverso di **sg**), ovvero la classe o insieme degli {*y*} con cui gli {*x*} hanno la relazione *R*.

P. es., se R è la relazione di “paternità”, $\left\langle \overleftarrow{\mathbf{R}}\,'\,x \right\rangle$ connota {y} che denota l’insieme dei figli, mentre {x} denota l’insieme dei padri.

13 Teorie del significato e teorie della predicazione

13.1 Teoria estensionale del significato

13.1.1 Significato e referenza

- Come abbiamo appena visto, nella **semantica dei linguaggi formalizzati (= semantica formale)**, anche nel caso dell'analisi del significato di un **termine,** del suo **senso** (**connotazione, *meaning***) e del suo **significato (denotazione, *reference*)** esso viene analizzato in termini **proposizionali.** Nei termini, cioè, della proposizione corrispondente a quel termine, più esattamente:
   1. Della **descrizione definita** (logica dei predicati: Cfr. slide 192) e/o della **funzione descrittiva** (logica delle relazioni: Cfr. slide 218) che connota (descrive) quel termine e quindi determina la sua capacità denotativa, la sua capacità di riferirsi univocamente a un determinato oggetto (P.es., connotare Platone identificandolo con "il maestro di Aristotele").

2. Della **definizione estensionale dell’identità** in termini di equivalenza dei predicati e di uguaglianza fra classi di equivalenza (Cfr. sopra § 11.2.5, slide 211s.), che Frege pensava di poter estendere anche ai termini singolari, così da giustificare quella che è stata definita una **teoria descrittiva della referenza.**

- Se però la definizione estensionale dell’identità, applicata a termini **generici,** porta a delle chiari ed inaccettabili riduzioni sul significato delle espressioni in **LN** e quindi delle teorie che fanno uso di **LN**, le teorie filosofiche innanzitutto (si veda quanto detto sopra in § 11.2.5, a proposito dell’equivalenza fra la classe degli “animali razionali” e la classe dei “bipedi implumi”, riferita agli uomini) l’ampliamento della teoria estensionale dell’identità fino ad includere in essa i **termini singolari,** e dunque la soluzione del problema della **referenza,** porta a delle vere e proprie **antinomie**.
- Infatti, dopo i teoremi di incompletezza di Goedel, come d’altra parte già Tarski aveva messo in evidenza nei suoi teoremi di **semantica formale**, pretendere di estendere ai termini singolari in un linguaggio formalizzato, l’identità estensionale fra le classi e quindi la soluzione del problema della **referenza** e della **verità come corrispondenza-ad-oggetto** , significa supporre che **entro la classe di equivalenza stes-**

sa, sia definibile una **funzione descrittiva** (una **funzione caratteristica** nel caso di insiemi) in grado di **enumerare completamente tutti** gli oggetti della classe, se stessa compresa.

- Ma è precisamente questa funzione che **non può esistere** in **L**, all'interno del medesimo linguaggio formale, come i teoremi di Goedel dimostrano. Quando tale funzione esistesse in un **meta-linguaggio L'≠L**, afferma **Tarski**, tale meta-linguaggio dev'essere di **ordine** (**grado semantico**) **più alto**, in grado cioè di esprimere in se stesso, tutti i **simboli e le relazioni** del **linguaggio-oggetto**, gli **oggetti** che il linguaggio-oggetto "intende" rappresentare mediante i suoi simboli e le **relazioni** fra questi oggetti e i relativi simboli.
- Non per nulla, quando seguendo Bochenski, abbiamo denotato la **funzione descrittiva,** associata alla relazione *R*, con *R'*, per esprimere la sua capacità di denotare un termine singolare (p.es., se *R* ↔ "essere madre", *R'* ↔ "la madre di…"), si intendeva proprio questo.
- "*R-primo*" deve essere di ordine più alto di *R* perché deve avere per argomento non un *individuo x* generico uguale a qualsiasi altro rispetto a *R*, ma deve avere per ar-

gomento un singolo *x*!, ovvero deve avere per argomento anche la relazione *R* con quell'*x* in quanto tale (*x*!), quindi *R'* non può essere *R* stessa.

  - P.es., per rimanere nell'ambito dei nostri esempi "eccelsiastici", nel caso dell' "essere madre", il modo unico con cui la maternità ineriva a Monica, la madre di S. Agostino, non è lo stesso modo con cui ineriva a Rosa, la mamma di S. Giovanni Bosco, sebbene ambedue, madri di santi.

- Molto più semplicemente, per dirlo nei termini in cui Tarski l'ha detto nei suoi teoremi di semantica formale, se *R* è bi-argomentale, come nel nostro caso della maternità (*Rx*,*y*), *R'* avendo per argomento anche *R*, dev'essere almeno tri-argomentale (*R'x*,*y*,*z*) , né, per soddisfare alla regola dei gradi semantici (Cfr. sopra, §10.3.3, p.173), può appartenere allo stesso "grado semantico" (o "tipo logico" per dire la stessa cosa nei termini della teoria dei tipi di Russell) del suo argomento *R*, ma ad uno più alto.
- Ecco perché per tutti coloro che riducono la logica al calcolo logico delle proposizioni, dei predicati e delle classi, in una parola al **calcolo logico delle relazioni** e quindi riducono la **semantica** alla teoria estensionale del significato, il problema della **referenza** diviene un problema **logicamente intrattabile** (una questione di

“fede”, ma non di “ragione”) — e con ciò divengono fortemente problematiche le stesse nozioni di **verità** e **necessità** logiche.

13.1.2 Teoria estensionale del significato come teoria sostitutiva dei predicati

- L’autore che più di ogni altro, nell’ambito della logica formale e della filosofia analitica del ‘900 ha tratto le conseguenze più estreme di questa situazione è W.V.O. Quine.
- Punto fondamentale del suo approccio è, una verità, peraltro evidente almeno alla cultura occidentale, ovvero che, senza una teoria estensionale del significato non si darebbe **scienza** nel senso **moderno** del termine, ovvero non ci sarebbe **scienza matematica** e non ci sarebbero **scienze naturali** in senso moderno, basate su un **formalismo matematico.**
- **“Definire”** infatti, nella scienza matematica, significa trovare una **definizione equivalente,** sostituire un predicato con uno equivalente, e proprio per questa sostituibilità (identità) fra predicati equivalenti si usa il segno “=”, invece di “≡” (p.es., scriviamo “5=3+2”, sebbene fra i due membri dell’equazione non esista di per sé identità, ma solo equivalenza).

- In altri termini, nelle scienze matematiche e in tutte le scienze che al formalismo matematico si rifanno, vale il cosiddetto **assioma di estensionalità,** che discende immediatamente dalla definizione dell'uguaglianza fra le classi nei termini della loro equivalenza:

$$(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \Rightarrow ((\mathbf{A} = \mathbf{B}) \wedge \forall x (Ax = Bx))$$

- Ovvero, se due classi sono equivalenti, non solo sono uguali, ma i loro predicati (di per sé solo equivalenti) possono considerarsi **identici** e quindi reciprocamente **sostituibili**.
- → Le cosiddette **logiche estensionali** sono quelle logiche che seguono questo assioma nell'analisi delle rispettive **semantiche**
- Se questo, secondo Quine, riduce di molto la ricchezza dei significati in **LN** tanto peggio per **LN:** il **progresso scientifico** consiste proprio nel sostituire sistematicamente, in base all'assioma di estensionalità, le espressioni ambigue di **LN** con quelle formalizzate di **L**, p.es., sostituire sistematicamente tutte le occorrenze del predicato "essere acqua" nelle varie lingue $\in$ **LN,** col predicato "essere H_2O" della chimica.

- Così, per esempio, nella psicologia, occorre sostituire sistematicamente tutti gli **asserti intenzionali** della ***folk psychology*** (psicologia popolare), pre-scientifica con gli asserti osservativi **equivalenti**, della scienza neurofisiologica, nella supposizione — peraltro mai dimostrabile, per il succitato irresolvibile problema della referenza — che ambedue hanno come referente eventi neurofisiologici del cervello.

13.1.3 W. V. O. Quine: problematicità nelle logiche estensionali delle nozioni di referenza, necessità e verità logiche

- In base a questa semantica estensionale è impossibile giustificare formalmente la **referenza extralinguistica** degli enunciati [Quine]. In base all'assioma di estensionalità, ciò che si può garantire è al massimo la corrispondenza fra strutture logico–formali nei vari linguaggi.

- P.es., ciò che in linguaggio ordinario denotiamo come "bastone", in fisico-chimica denotiamo come "un certo aggregato di macromolecole organiche", in fisica dei materiali come "certo aggregato di composti del carbonio", in fisica atomica come un "certo aggregato" di atomi (carbonio, azoto, ossigeno, idrogeno…), tipici della materia organica, etc., senza mai la possibilità di "saltare il cerchio" di queste **connota-**

zioni (funzioni descrittive, le cui variabili sono state o vincolate o sostituite da valori risultanti dall'osservazione empirica**) equivalenti** verso l'oggetto extra-linguistico.

- Di qui non sorprende che **tutta l'ontologia della scienza** di Quine si riduca alla famosa massima, **«essere è essere il valore di una variabile».**
- **L'ontologia della scienza** — che per Quine, in base al principio di sostituzione si identifica con **l'ontologia scientifica, l'ontologia come scienza *tout court* —,** si riduce così all'individuazione di quelle **condizioni logico-linguistiche** che rendono consistente, caso per caso, o il vincolare mediante l'opportuno quantificatore universale, o esistenziale la variabile libera (*x*) di una determinata funzione proposizionale (*Px*), oppure di sostituirla con il valore di una costante di un enunciato osservativo(*Qa*) che possa essere considerato **equivalente**. In base a tali principi, nell'ontologia scientifica si distinguono:
  - fra vari tipi di oggetti *individuali*, osservabili e non (se i relativi enunciati vanno quantificati individualmente "«<u>per un</u> *x* tale che P…: $\exists! xPx$"»);
  - fra i vari tipi di oggetti *collettivi* comuni a più individui, come "«organismo"», "«elettrone"», etc. (se i relativi enunciati vanno quantificati come collezioni "«<u>per qualche</u> *x* tale che P…: $\exists xPx$"»);

- fra i vari tipi di oggetti , *astratti*, come «numero», «proprietà», «classe», etc. (se i relativi enunciati vanno quantificati universalmente «per ogni *x* tale che P…: $\forall xPx$»).

- Mediante poi i relativi «connettivi» o «predicati proposizionali», come «non», «e», «implica», etc., i singoli asserti così costituiti vengono articolati in discorsi più complessi ed, al limite, in teorie scientifiche.
- Nei termini resi famosi da Frege: dire «*x* esiste» in questa ontologia equivale a dire «qualche *x* appartiene ad *y*». Ovvero, affermare l'esistenza di un oggetto si riduce ad affermare l'appartenenza di quell'oggetto ad una classe consistente di oggetti ed, al limite, ad una successione di classi equivalenti definite in diversi linguaggi, senza la possibilità di uscire mai da questo reticolo di equivalenze. Per dirla nei termini Quine:

  Gli oggetti servono come meri «nodi» nella struttura, e questo è vero dei bastoni e delle pietre non meno degli elettroni, dei quark, dei numeri e delle classi (Quine 1984, 24).

- La scienza, di fatto, ha solo una cosa da portare avanti: il proprio discorso, le proprie affermazioni,

affermazioni vere, speriamo; verità che riguardano la natura. Gli oggetti, o i valori delle variabili, sono solo punti di riferimento lungo il cammino e noi possiamo permutarli o sostituirli a piacimento *nella misura in cui la struttura di enunciato–ad–enunciato sia preservata* (Quine 1984, 54).

- Quel "speriamo" aggiunto al predicato "vero" attribuito a determinate affermazioni delle scienze non è piaggeria narcisistica. Una semantica formale, che "rimanda all'in(de)finito" la soluzione del problema referenza, è una semantica che non sa ultimamente giustificare la **verità** di alcun enunciato, né la stessa **necessità logica**, se è vero come è vero che la nozione stessa di **conseguenza logica** in semantica suppone la nozione di **verità logica**.
- Ed in effetti Quine, in un saggio del 1953 "Due dogmi dell'empirismo" che ebbe presso la comunità dei filosofi analitici lo stesso effetto devastante che ebbe la scoperta dei numeri irrazionali per la comunità pitagorica, dimostrò che, dopo i teoremi di Tarski e Goedel ha ben poco senso per il filosofo analitico distinguere, seguendo Russell nell'analisi dei linguaggi scientifici, fra **verità concettuali a priori, analitiche** (nel senso dei "giudizi sintetici a priori" di Kant) e **verità sintetiche a posteriori,** contingenti perché empiriche e non-concettuali**.**

- Secondo Quine, se eccettuiamo le **tautologie delle leggi logiche** delle quali, per definizione, nessuna interpretazione fattuale è possibile dare, non c'è più traccia di **verità analitiche** nell'orizzonte di un'analisi concettuale a base linguistica come quella inaugurata dai lavori di Russell e Wittengstein all'inizio del '900**.**
- L'ontologia di Quine appare così in continuità con l'analisi dell'**essere** propria di tutte le logiche **estensionali** già operata da Giuseppe Peano agli inizi del '900 nel suo *Dizionario di matematica* (1901, p. 376), secondo la quale «è», ha estensionalmente, oltre che la caratteristica di un'assoluta **atemporalità,** tutti questi possibili molteplici sensi:
  - **Appartenenza (nel senso di "essere membro di"):** «7 è un numero primo» $\Leftrightarrow \langle 7 \in \mathbf{N_P} \subset \mathbb{N} \rangle$
  - **Inclusione:** «l'uomo è mortale» $\Leftrightarrow \langle \mathbf{U} \subset \mathbf{M} \rangle$
  - **Identità (estensionale):** «sette è uguale a tre più quattro» $\Leftrightarrow \langle 7 = 3 + 4 \rangle$
- **Particolarizzazione:** «vi sono quadrati che sono somme di quadrati» $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left\langle \exists x, y, z \in \mathbb{N} \middle| \left[x, y, \left(x^2 + y^2 \right) \in \mathbf{A} \subset \mathbb{N} \right] \wedge \left(z, z^2 \in \mathbf{B} \subset \mathbb{N} \right) \wedge \left(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing \right) \right\rangle$, condizione valida per tutte le cosiddette «triple pitagoriche» di numeri quadrati che sono

somme di quadrati (Es. $5^2 = 3^2 + 4^2$) , dove con $\mathbb{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali.

13.1.4 Il recupero ontologico della distinzione fra verità necessarie e contingenti ad opera di S. Kripke

- Di solito tutti gli storici recenti del **movimento analitico** del '900 (Huges 2004; Soames 2005) sogliono indicare un'altra data, storica, dopo il 1953 e la dimostrazione, pubblicata da Quine in quell'anno, di inconsistenza della distinzione fra **verità necessarie** e **verità contingenti** nei termini **concettualisti** neo-kantiani della filosofia analitica delle origini.
- Si tratta della pubblicazione nel 1971 delle famose tre conferenze tenute da Samuel Kripke nel 1970 a Princeton, riunite nel famoso saggio *Naming and Necessity*, in cui la distinzione fra **verità necessarie** e **verità contingenti** veniva reintrodotta in **logica:**
    1. Interpretando in forma **ontologica** le scoperte di Tarski — verità come "corrispondenza ai fatti" di teorie come "sistemi semanticamente aperti" — e Goedel — incompletezza delle teorie e verità solo per teorie interpretate come "model-

li” di sistemi formali —, distinguendo cioè fra enunciati **veri in tutti i mondi possibili** ed enunciati **veri in alcuni soltanto** (→ ciò che in **semantica** sono “modelli”, in **ontologia** sono “mondi, attuale/possibili”)**;** e soprattutto

2. Aggiornando l’ontologia con l’evidenza del **carattere evolutivo,** non solo della biologia, ma dell’intera **cosmologia** e delle sue leggi**.**
   - P.es., il fatto che “l’acqua sia H_2O” è una **verità necessaria** per la fisico-chimica, non ad opera di qualche nostra concettualizzazione (Russell) o convenzione linguistica (Quine), ma perché sebbene l’acqua esista **attualmente** come H_2O soltanto in quelle parti e età dell’universo in cui valgono le leggi chimiche (= “**mondo attuale”** parti o età dell’universo in cui, causa le relativamente basse temperature, è possibile la stabilità dei composti atomici e molecolari, cosa che non era ai tempi dell’universo primordiale, né a tutt’oggi lo è all’interno delle stelle: = “**mondi fisicamente possibili”**).
   - Pur tuttavia laddove l’esistenza dell’acqua come H_2O è solo **causalmente possibile** per le alte temperature, è **necessario che sia possibile sempre e ovunque nell’universo fisico** solo come H_2O. Infatti, a) che l’acqua sia solo “causalmente possibile” nelle parti/età dell’universo ad alta temperatura di-

pende dal fatto che l'universo attuale e/o la composizione chimica delle parti dell'universo a bassa temperatura **dipendono causalmente** dall'universo ad alte temperature delle origini e/o la composizione chimica delle molecole sulla terra è effetto causale della fisica ad alte energie del sole, se non altro perché la terra è un pezzo di sole raffreddatosi); b) pur tuttavia, ripetiamo, laddove l'acqua come H_2O è solo causalmente possibile è **necessario che sia possibile** solo come H_2O. Infatti, il fatto che l'acqua sia H_2O fa parte dell'**essenza** dell'acqua, sia dove essa esiste in atto (come effetto di uno **specifico concorso causale: "mondo fisicamente attuale"**), sia dove essa esiste nella **potenza attiva** delle cause proprie che determinano la sua essenza, il suo "esser-acqua" **("mondi fisicamente possibili")**.

- Come si vede, questa ripresa della distinzione logica fondamentale in **logica dei predicati** fra **verità necessarie** e **verità contingenti** , avviene in Kripke recuperando al post-moderno alcune nozioni classiche della filosofia pre-moderna, aristotelica e scolastica, per il **fallimento sistematico** della modernità di fondare la **verità/necessità logica** solo sulla concettualizzazione (evidenza) e non sull'essere delle cose.

- Come vedremo subito, tale recupero consiste:
    1. In un inizio di “ri-modalizzazione” della **ontologia**, nel restituire cioè l’ontologia alla logica modale, delle varie distinzioni fra necessità/possibilità nei termini ontologici di **attualità (essere-attualmente, *actu esse*,** nel **“mondo attuale”)/potenzialità(essere-potenzialmente, *potentia esse*, in altri “mondi possibili”,** “tutti” se verità metafisica “alcuni” se verità fisica), contro l’**attualismo ontologico** moderno che relega la necessità/possibilità al solo ambito **logico**, riducendola cioè al solo esplicito/implicito, di un qualcosa che comunque esiste solo attualmente (riduzione della **verità a “svelamento”:** si pensi ai teoremi che logicamente “esistono” già negli assiomi: devono solo essere “scoperti”).
    2. In un inizio di rivalutazione della nozione ontologica di **genere naturale (*natural kind***), causalmente fondato, come fondamento logico-epistemologico della nozione logica-astratta di **classe** e conseguentemente del superamento della riduzione moderna kantiano-fregeana dell’**appartenenza** alla sola ***membership,*** alla sola relazione estensionale dello “essere membro enumerabile” di una classe.

3. In un inizio di rivalutazione del valore logico, perché “naturalmente **ontologico”,** dei linguaggi naturali. Essi, a differenza dei linguaggi formalizzati in termini puramente estensionali, mantengono viva — attraverso la distinzione fra “predicazione nominale” per generi (es.: “Socrate è un uomo”) e “predicazione aggettivale” per proprietà (es.: “Socrate è bianco”) — la distinzione ontologica fra **predicazione essenziale** e **accidentale,** unico fondamento possibile della distinzione logica fra **verità necessarie, “vere in tutti i mondi possibili” (non tautologiche)** e **verità contingenti, “vere in alcuni mondi possibili”.**
4. In un inizio di superamento del “vicolo cieco” della fregeana “teoria descrittiva della referenza”, attraverso un’interpretazione dei **nomi propri** come **designatori rigidi,** perché loro referente non è l’attualità cangiante nei diversi mondi (contesti) della loro **esistenza**, ma l’**immutabilità della loro essenza** causalmente (aristotelicamente) interpretata. Interpretata cioè come “essere potenzialmente” di un genere di enti nelle loro cause, e non interpretata platonicamente come referente di un’intuizione concettuale (*intellectus* come “*intus legere*”, di un **essenza** attualmente esistente “pre-confezionata”, seppure “nascosta”, sotto i velami delle apparenze sensibili).

- L’aver sottolineato il carattere **iniziale** di questa “rivoluzione ontologica” kripkiana, che è alle basi dell’attuale distinzione fra **logica formale** e **ontologia formale** da noi più volte ricordata, fa vedere che l’approccio di Kripke, sia ancora **fortemente lacunoso,** seppure ormai indispensabile per la **semantica delle logiche modali** e per la formalizzazione in questa semantica delle **logiche intensionali**.
- Pur tuttavia, è stato così imponente **l’impatto dell’approccio di Kripke** sulla filosofia analitica contemporanea, da determinare, fra l’altro, in Quine una reazione quasi stizzita di fronte a tanto successo.
- Non volendo Quine finire aristotelico, egli preferisce rinunciare alla **necessità in logica e matematica** in nome della semplice **analiticità** tautologica, pur di non accettare la soluzione ontologica kripkiana. Afferma infatti esplicitamente in un saggio dedicato proprio alla rinuncia della nozione della **necessità** in logica e matematica per la sola analiticità tautologica, formalista, interpretabile dopo Goedel solo in forma **convenzionalista**, pur di non sottomettersi alla fondazione della **necessità logica** su quella **ontologica**.

Difendere l’essenzialismo aristotelico (…) non fa parte dei miei intenti. Una tale filosofia è tanto irragionevole ai miei occhi, quanto lo è agli occhi di Carnap e di

Lewis. Ma la mia conclusione, a differenza di Carnap e di Lewis è: tanto peggio per la logica modale (…). Infatti, se non ci prefiggiamo di operare la quantificazione attraverso l'operatore di necessità, non si vede quali possano essere i vantaggi di quell'operatore rispetto al semplice citare che un enunciato è analitico (Quine 1986, 145).

13.2 Teoria intensionale del significato

- E' evidente, dunque, che se le regole del calcolo estensionale dei predicati valgono per gran parte dei linguaggi scientifici e matematici, non valgono per moltissimi usi del **linguaggio ordinario**, in particolare nei suoi usi **ontologici,** ma non solo in quelli.
- P. es., la verità della proposizione composta «Giulio Cesare scrisse il *De Bello Gallico* **mentre** combatteva contro i Galli» non è certo analizzabile **vero– funzionalmente**, nei termini cioè del **solo** valore di verità delle due proposizioni elementari componenti, com'è obbligatorio nelle teorie estensionali del significato.

- Occorre necessariamente, per render conto della verità della proposizione composta, una comprensione del **denotato dei termini** → Il predicato proposizionale temporale «mentre», come gli altri predicati proposizionali «prima», «dopo», non sono analizzabili nei termini del calcolo estensionale delle proposizioni, **vero–funzionale.** [GA2].
- Approccio **intensionale** alla logica dei predicati *vs.* approccio **estensionale:**
  - P. es., se prendiamo la proposizione «Isidoro è sapiente»,
    In senso **estensionale:** «Isidoro è uno degli uomini sapienti»: $I \in \mathbf{S}$
    In senso **intensionale:** «Isidoro è determinato dalla sapienza»: *I a S,*
    nel **doppio senso** che la sapienza è una **qualità** che determina l'esistenza di Isidoro, allo stesso tempo l'esistenza di Isidoro attualizza, "re-alizza", concretizza in maniera unica **l'essere-potenzialmente** della "sapienza", intesa come un "un determinato concorso causale che rende sapienti" (p.es., se "leggere certi libri", "fare certe esperienze difficili", etc. è ciò che rende sapienti, è ovvio che questa "potenza attiva" della sapienza produrrà effetti di "esser sapienti" diversi a seconda dei soggetti "passivi" su cui si applica →

1. → l’**esistenza** di Isidoro non si riduce all’appartenenza di classe, non è un puro essere in senso estensionale in nessuno dei sensi di Peano (Isidoro può esistere anche come non-sapiente)
2. → l’**essere della qualità** non è l’essere dell’esistenza, bensì è l’essere dell’essenza, l’ “essere-potenzialmente” di ciò che determina **cosa** Isidoro **è** non il **fatto di esistere,** per il fatto che Isidoro è “ciò che esiste” sia che sia “sapiente” o no. Complementariamente, Isidoro-esistente per il fatto che è determinato dalla sapienza, diventa *ipso facto* ciò che la realizza, che la fa esistere in concreto, per ciò stesso però delimitando la sua potenzialità attiva di “sapientizzare” **.**

- → Distinzione fra **essere dell’esistenza** e **essere dell’essenza** chiave di volta di tutte le teorie intensionali del significato → dell’**ontologia dei linguaggi ordinari,** ovvero dei linguaggi usati nelle comunità linguistiche di soggetti intenzionali, per i loro processi di comunicazione significativa.
- Generalmente le logiche intensionali si caratterizzano perché rifiutano due assiomi del calcolo dei predicati estensionale, in quanto la loro applicazione rende **insensati** diverse forme del linguaggio ordinario [Zalta 1988]:

- **Assioma di estensionalità**: **A ≡ B ⇒ A = B**
- **Assioma di generalizzazione esistenziale:** $\phi v \Rightarrow \exists x\, \phi x$ "se *io* penso, esiste *qualcosa che pensa*"
- P. es.: «Chiare, fresche e dolci *acque*, ove le belle membra pose *colei* che solo a me par donna» diventerebbe «Chiare fresche e dolci H_2O, ove le belle membra pose *qualcosa* che solo a me par donna»
- Oppure: «*Signore Onnipotente*, benedici quest'*acqua*…» diventerebbe «*Qualcosa Onnipotente*, benedici quest' H_2O…».

- Diversi sono tipi di **logiche intensionali,** le principali e le più studiate, perché implicite nella stessa logica aristotelica, sono quelle **modali** relative a diverse **modalità di esistenza** dei rispettivi oggetti e quindi di solito formalizzate mediante l'ausilio di opportuni **operatori modali**. Seguendo una serie di distinzioni che risalgono fino allo Pseudoscoto e a Ockham:
  - **Modalità aletiche**:
    → **logiche:** «è necessariamente vero», «è possibilmente vero», (→logiche aletiche);
    → **ontologiche:** «è necessario», «è contingente» (ontologie formali: distinzione

fra necessità fisica e metafisica (verità necessarie non-tautologiche) e necesità logica (verità necessarie tautologiche)

- **Modalità epistemiche:** «è saputo», «è creduto» (logiche epistemiche)
- **Modalità deontiche:** «è vietato», «è permesso», (logiche deontiche)
- **Modalità temporali:** «è sempre il caso», «è talvolta il caso» (logiche temporali)
- **Modalità assiologiche:** «è buona cosa», «è cattiva cosa» (logiche assiologiche)
- …

13.3 Teoria relazionale della predicazione[GA1, pp.11-18]

- La teoria moderna della predicazione in logica, è concepita, come il resto del pensiero scientifico moderno, per liberarlo dai **legami con l'ontologia classica**. Nello specifico, per liberarlo da ogni dipendenza con la teoria medievale degli **universali.**

- La teoria moderna della predicazione, prende le mosse dalla nozione fregeana di **saturazione** (completezza, *Vollständigkeit*) di una proposizione, come fondamento della sua **unità** logica (composizione di soggetto/predicato), mediante composizione di:

1. **Parte satura:** soggetto della proposizione designante un individuo (p.es.: *Socrate*)
2. **Parte insatura:** predicato (verbale e/o nominale) della proposizione designante una proprietà e/o una relazione (p.es.: *è uomo*, *mangia la mela*).

- → **Irrilevanza della copula** in quanto esprimente la semplice **relazione di appartenenza** fra le due parti che costituiscono la proposizione.
- → **Interpretazione relazionale dei predicati**: nei predicati *n*-argomentali, il predicato designa infatti una relazione fra individui (P.es.: “Socrate (*s*) mangia (*M*) la mela (*m*)” → <*M*(*s*,*m*)>). → Nei predicati mono-argomentali, il predicato designa una proprietà che può essere allora intesa come relazione ad un solo termine o relazione di un individuo con se stesso (P.es.: “Socrate è uomo (*U*)” → <*U*(*s*)>).
- → **Conseguenza ontologica:** individuo determinato unicamente dalle relazioni con altri individui, se stesso compreso → passaggio dall’**ontologia dell’oggetto** e delle sue determinazioni all’**ontologia degli stati-di-cose,** in quanto puramente relazionale.

- → Sulla logica formale viene operato uno “svuotamento” dai contenuti ontologici, simile a quello operato, cinquant’anni prima di Frege, da Riemann nella matematica, trasformandola da **scienza delle quantità** (continue (enti geometrici) e discrete (enti numerici)) a **scienza delle relazioni** (sistemi formali algebrici) passibili di interpretazioni (modellizzazioni) sia geometriche che aritmetiche.
- → **Copula “è”** nella teoria fregeana della predicazione può **essere cancellata** poiché significa solo appartenenza fra le due parti della proposizione S/P.
- → **Unico modo consentito** per dare visibilità alla **copula “è”** è quando significa identità. Distinzione fra:
    1. Aristotele è un filosofo
    2. Aristotele è filosofo
    3. Aristotele è il filosofo

  In 1. e 2. la copula ha, per il moderno — che non distingue fra predicazione **nominale** (di genere o essenziale) e **aggettivale** (di proprietà o accidentale) —, il medesimo senso dell’**appartenenza** (del predicato al soggetto → dell’individuo alla classe denotata dal predicato) → copula può essere **cancellata** come irrilevante.

In 3. “filosofo” poiché accompagnata dal determinativo “il” ha la stessa funzione del soggetto grammaticale di **denotare un individuo** (= nome proprio). Corrisponde, cioè, a quella che abbiamo già trattato come esplicitazione della **quantificazione singolare** nella logica dei predicati (Cfr. slide 191)→ “è” indica **un’identità fra soggetto e predicato**

→ 1. e 2. simbolizzabili con <*F*(*a*)>; 3. come <*a* = *f*>, più esattamente, nei termini della definizione della **quantificazione singolare**:

$$\exists! x =: \exists x \left(Fx \wedge \forall y \left(Fy \rightarrow y = x \right) \right)$$

- → Differenza fra la teoria moderna (fregeana) della predicazione o **teoria dell’appartenenza di classe** e teoria parmenidea e neo-platonica della predicazione come **teoria dell’identità,** molto importante nel Medio Evo.
- → Teoria fregeana vicina solo **in parte** a quella aristotelica (come più volte ricordato, l’appartenenza **per generi** di Aristotele non è quella **per classi** di Frege) mentre la teoria tommasiana della predicazione si pone **come sintesi fra le due** essendo basata sul **carattere incompleto** delle due parti della proposizione che allora **mutuamente si determinano** come potenza (soggetto) e atto (predicato).

13.4 Teoria ontologica della predicazione

- Una delle notizie più confortanti per un filosofo come me abituato a lavorare con gli scienziati e che, quando si usa un metodo rigoroso, anche in filosofia come nelle altre scienze, si possono ottenere in **maniera del tutto indipendente** risultati convergenti, al di là delle ideologie, delle credenze e di tutto il resto.
- Recentemente N. B. Cocchiarella, affrontando questo nostro stesso problema, ha proposto una teoria della **doppia saturazione** fra S e P per far sì che un **enunciato singolare**, ridefinendo continuamente S e P e il loro rapporto, sulla singolarità dell’oggetto rende l’enunciato denotativo stesso capace di “agganciarsi” all’oggetto referenziale e alle sue modificazioni, senza bisogno di attingere a livelli più alti della gerarchia semantica.
    - → Teoria applicabile, andando oltre Cocchiarella, a tutta la **logica dei nomi** come **designatori rigidi** (in tutti i mondi possibili)**,** tanto di oggetti **singoli** (nomi propri denotanti individui), tanto di oggetti **collettivi** (nomi comuni denotanti generi naturali).

- S. Tommaso d’Aquino per risolvere lo **stesso problema** della capacità denotativa di un **universale-uno-di-uno** affermava testualmente che l’unico modo per salvare questa modalità di significazione è di consentire a S e P di ridefinirsi mutuamente, in relazione al loro comune **riferimento**. Non c’è dunque bisogno di alcun *R’* di ordine logico più alto per giustificare il riferimento-all’indidividuo, argomento della relazione *R*.
- Ecco il testo di Tommaso:

«Bisogna sapere, dice Tommaso, che qui “universale” non viene inteso nel senso di ciò che viene predicato di più soggetti, ma secondo un qualche adattamento o adeguazione (adaptationem vel adaequationem) del predicato al soggetto, rispetto alla quale né il predicato viene detto senza il soggetto, né il soggetto senza il predicato (*In Post.Anal.*, I,xi,91)».

- Analogamente Cocchiarella propone un simile modo di “saturazione”, di determinazione **reciproca** fra S e P in ogni proposizione singolare.
- Mentre nel logicismo fregeano l’unità della proposizione si basa sulla distinzione fra entità logiche saturate (soggetti) e non-saturate (predicati), nel realismo concettuale l’unità della proposizione si giustifica mediante la complementazione di due entità

logiche non-saturate: **concetti con funzione predicativa** (verbi) e **concetti con funzione denotativa (nomi)**, così che l'unica entità concettuale satura è la proposizione.

- Ciò avvicina di molto l'ontologia formale della logica del concettualismo di Cocchiarella all'ontologia della logica aristotelica in cui **nomi e verbi** vengono considerati come, rispettivamente, *materia* e *forma* del risultante enunciato predicativo (= ente logico), analogamente a come *materia* e *forma* sono considerati i costituenti dell'ente fisico, nella sua ontologia fisica.

Sommario

Note

[1] Nei libri di logica in inglese è invalso di definire questi nomi comuni usati in forma predicativa come ***sortal names.*** In effetti, gli appartenenti a un genere, in quanto individui solo genericamente definiti, sono distinti solo numericamente, ovvero in quanto oggetto di un conteggio (*sorting*). È il classico approccio della riduzione di un individuo a "numero" che è tipico di ogni predicazione scientifica, per l'appunto *generica*. Degli individui come tali (come **singoli,** se vogliamo addirittura come "persone" che denota il massimo della singolarità individuale) non si fa scienza (*individuum non est scientia*).